

OS 3 (1)

L e h r b u c h
der
descriptiven Geometrie,

AP 61
A 183

nebst
einer, die Theorie der Ebene und geraden Linie
im Raume enthaltenden Einleitung

von
Lefebure de Fourcy,
Ritter der Ehrenlegion, außerordentlichem Mitgliede der Academie der Wissenschaften zu Paris etc. etc.

A u s d e m F r a n z ö s i s c h e n ,
nach der vierten Originalauflage,

übersetzt

von

Heinrich von Büнау,

Lehrer der Mathematik an der Königlichen Gewerb- und Baugewerkenschule
zu Chemnitz.

Mit vier und dreissig Figurentafeln.

Chemnitz und Schneeberg,
Verlag von Bruno Friedrich Goedsche, Sohn.

1 8 4 5.

b

n.v.

110/11

Lehrbuch der
descriptiven Geometrie

von
Dr. Theodor Reye

Verlag von Vieweg

Verlag von Vieweg

135 320 02 X



Sr. Durchlaucht

J o h a n n A d o l p h

Fürst zu Schwarzenberg

unterthänigst gewidmet.

2. Durchlaucht

Joseph von Koll

Fürst zu Schwarzenberg

unterthänigst gewidmet

Durchlachtigster Fürst!

Mögen Ew. Durchlaucht gnädigst geruhen,
die unterthänigste Zueignung der deutschen Bearbeitung des gegenwärtigen Werkes huldvoll, und als einen schwachen Ausdruck meiner Dankbarkeit für die Gnade aufzunehmen, durch welche es mir möglich wurde, auf Ew. Durchlaucht Eisenwerken in Steiermark einen wesentlichen Theil meiner practischen Ausbildung zu fördern.

Voll der tiefsten Verehrung

beharret

Ew. Durchlaucht,

unterthänigster

Heinrich von Büнау.

Durchlauchtigster Fürst!

Willigen Ew. Durchlaucht gnädigst geruhen,
die unterthänigste Zuneigung der deutschen Be-
arbeitung des gegenwärtigen Werkes huldvoll,
und als einen schwachen Ausdruck meiner Dank-
barkeit für die Gnade aufzunehmen, durch wel-
che es mir möglich wurde, auf Ew. Durchlaucht
Eisenwerken in Steiermark einen wesentlichen
Theil meiner praktischen Ausbildung zu fördern.

Voll der tiefsten Verehrung

beharret

Ew. Durchlaucht

unterthänigster

Herrn von Hohenhausen.

Vorwort des Uebersetzers.

Seit M o n g e gegen das Ende des vorigen Jahrhunderts die descriptive oder darstellende Geometrie als einen besonderen Zweig der Geometrie darstellte, und hierdurch eine, bis dahin unbekannte Wissenschaft gründete, haben vorzüglich französische Gelehrte an der weiteren Ausbildung derselben gearbeitet. Stimmen nun die Werke derselben im Allgemeinen mit einander überein, und findet man darin deutlich das Streben nach derjenigen Klarheit ausgedrückt, mit welcher M o n g e diese Wissenschaft vortrug, so konnte es gleichwohl nicht fehlen, daß für verschiedene Standpunkte der Auffassung derselben, nicht nur die ursprünglichen Gränzen mehr oder weniger verrückt wurden, sondern auch in der Behandlung des Ma-

terials selbst, eine gewisse, jener Auffassung eigenthümliche Verschiedenheit sich ausprägte. Einige sind der Ansicht, die descriptive Geometrie solle erst dann betrieben werden, wenn der Schüler zuvor eine nicht unbedeutliche Höhe in der Mathematik überhaupt erschwungen hat. Andere steigern ihre Forderungen minder, und empfehlen die fragliche Wissenschaft schon, wenn nur die Trigonometrie und Curvenlehre vorangingen; so wie endlich Mehrere kein Bedenken tragen sie unmittelbar der Elementargeometrie folgen zu lassen. Beruf und Bildungsweg müssen entscheiden, welcher von diesen Ansichten Folge zu leisten ist. Indessen, bei dem heutigen Stande der meisten Lehranstalten, deren Aufgabe dahin geht, zunächst Künste und Gewerbe durch Verbreitung gemeinnütziger Kenntnisse fördern zu helfen, dürfte die zweite Art der Auffassung für das Studium der descriptiven Geometrie am geeignetsten erscheinen. Hieher gehört nun auch das Werk, dessen Uebersetzung ich im Vorliegenden versucht habe, und dessen Anordnung aus dem Vorberichte des Verfassers dergestalt zu ersehen ist, daß eine nochmalige Angabe derselben gänzlich überflüssig gewesen sein würde. Nur so viel sei darüber bemerkt, daß dieses Werk sich auch als Lehrbuch der descriptiven Geometrie für solche Schüler benutzen läßt, welche nur erst in der Elementargeometrie gehörige Kenntnisse erlangt haben; da dann ohne Nachtheil für den Unterrichtsgang, höher stehende Probleme z. B. die der windschiefen Oberflächen überschlagen, und spä-

ter bei passender Gelegenheit vorgenommen werden können.

Was nun die Uebersetzung selbst anlangt, so war es dabei mein unablässiges Bestreben dem Original vor Allem materiell thunlichst nahe zu kommen. Zu eigenen Bemerkungen fand ich kaum einen Anlaß, da der Gegenstand innerhalb der vorgezeichneten Gränzen erschöpfend behandelt erschien, und der Verfasser selbst in der neuesten, vierten, im Jahre 1842 veröffentlichten Auflage, gegen die erste von 1830, nur Unwesentliches abgeändert hat. — Aber auch hinsichtlich der Form des Ausdrucks erschien es angemessen, keinerlei Aenderung vorzunehmen, vielmehr benutzte ich, um völlig sicher in der Auswahl der Worte und deren originalgetreuer Verbindung zu verfahren, den Beirath meines Collegen des Herrn Benoit, Lehrers der französischen Sprache, dem ich für seine, in so fern gehabte Mühewaltung hierdurch meinen wärmsten Dank darbringe.

Und so möge denn gegenwärtige Uebersetzung zur Verbreitung einer Wissenschaft im deutschen Vaterlande beitragen, deren Unentbehrlichkeit für alle Untersuchungen, welche gründliches Auffassen des begränzten Raumes zum Gegenstand haben, nicht erst des Beweises bedarf; deren Nützlichkeit überhaupt aber auch aufser den Gränzen Frankreichs und namentlich in Deutschland bereits gebührende Anerkennung gefunden hat, wie unter

„H,
„H,

„H,
„H,
„H,
„H,

Andern aus den Lehrplänen einer nicht unbeträchtlichen Anzahl, der vorhin erwähnten Anstalten hervorgeht.

Chemnitz im April 1845.

v. Bünau.

Vorbericht des Verfassers.

Die descriptive Geometrie gewährt so mannigfaltige und umfassende Anwendung, daß man nicht zu sehr das Studium derselben empfehlen kann. Wollte man sich dabei nur auf die allgemeinen Sätze beschränken, so würde hierzu eine geringe Anzahl Seiten hinreichend sein; aber dann erschienen sie wohl als eine Reihe unantastbarer Wahrheiten, welche jedoch ihren Gebrauch so weit hinter sich ließen, daß es eines seltenen Scharfsinn's bedürfte, um für die Anwendung nützliche Folgerungen daraus zu ziehen. Daher ist es unumgänglich nöthig, die Lösungen einer angemessenen Anzahl solcher Aufgaben aufzustellen, aus welchen die Fruchtbarkeit der allgemeinen Sätze auf eine schlagende Weise hervorgeht.

Ich füge hinzu, daß um sicherer zu einer gründlichen Kenntniß der Hülfsmittel dieses wichtigen Zweiges der Geometrie zu gelangen, dem Leser zu empfehlen ist, sorgfältig die Figuren auszuführen, mit guten Instrumenten, und die Constructionen der meisten Aufgaben in einem ziemlich großen Maßstabe. Ohne der Fortschritte zu gedenken, welche Auge und Hand dabei im Zeichnen machen werden, so erwähne ich nur, daß in Folge dieser Uebung, die Aufmerksamkeit hinreichend lange auf die Anwendung der Grundbegriffe gerichtet, der Nutzen derselben klarer hervortreten, der Geist sie deutlicher auffassen, und das Gedächtniß dieselben ohne Mühe behalten wird.

Die vorliegende Abhandlung enthält vier Abtheilungen.

In der ersten wird von den Vorbegriffen, und den auf die gerade Linie und Ebene sich beziehenden Aufgaben gehandelt. Sie bildet an und für sich ein, zu einer großen Anzahl wichtiger Anwendungen, hinreichendes Ganzes.

Die zweite Abtheilung hat die krummen Oberflächen und berührenden Ebenen zum Gegenstand. Hierbei sind die windschiefen Oberflächen nicht ausgeschlossen; da aber die, dieselben betreffenden Fragen doch manche Schwierigkeit darbieten, so kann man die windschiefen Oberflächen beim ersten Lesen unberücksichtigt lassen, und später darauf zurückkommen, wenn man diess für passend findet.

Die dritte Abtheilung enthält die krummen Linien und die Berührungslinien. Hier führe ich bei den Durchdringungen der Oberflächen diejenigen Beispiele an, welche man gewöhnlich zu behandeln pflegt, und die alle bemerkenswerthe Vereinfachungen darbieten. Man darf aber nicht vergessen, daß diese Vereinfachungen nur den Fällen zukommen, wofür sie angewendet worden sind. Unerlässlich erschien es mir daher auch ein solches Beispiel anführen zu müssen, wobei die Constructionen sich verwickelter gestalten, und ich wählte dasjenige von zwei Revolutionsoberflächen, deren Axen in verschiedenen Ebenen liegen.

Endlich folgt dem Vorangehenden eine vierte und letzte Abtheilung unter dem Titel Uebungen. Sie besteht aus Aufgaben deren Lösung in den ersten Abtheilungen mit begriffen ist, die man aber willkührlich ausdehnen und beschränken, oder gänzlich vernachlässigen kann.

Oft verweise ich auf die Eigenschaften der Ebenen, wie solche in der Elementargeometrie dargestellt werden; um aber dem Leser die Mühe zu ersparen sie anderswo zu suchen, so habe ich dieselben in einer Einleitung aufgestellt.

N. B. Zum erleichterten Gebrauch sind diesem Bande nur zwei Tafeln angeheftet worden, die eine für die Einleitung und die andere zur Erklärung der Grundbegriffe der descriptiven Geometrie. In einem besonderen Hefte sind diejenigen Figuren enthalten, welche sich auf die vier Abtheilungen des Buchs beziehen. Bei diesen Figurtafeln erkennt

man an der Ueberschrift zu welcher sie gehören, und die einer jeden Figur beigeschriebene Ziffer zeigt, an welche Aufgabe dieselbe geknüpft ist. So z. B. bezieht sich die X. Figur der II. Tafel des ersten Theils auf die X. Aufgabe desselben und die Figur XIII—3 ist die dritte Figur der XIII. Aufgabe.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

	Seite
<i>Theorie der Ebene und der geraden Linie im Raume</i>	1
Erklärungen	1
Sätze welche unmittelbar aus dem Begriff der Ebene hervor- gehen	3
Vom Perpendikel auf die Ebene	4
Von den Schrägen zur Ebene	8
Parallele Gerade im Raume	10
Die gerade Linie und die zu ihr parallele Ebene	12
Parallele Ebenen unter sich	14
Perpendikuläre Ebenen unter sich	17
Kürzeste Entfernungen zweier Geraden	19
Von den, durch Ebenen gebildeten Winkeln	20
Zu beweisende Lehrsätze	33

Descriptive Geometrie.

<i>Erste Abtheilung. Die gerade Linie und die Ebene</i>	37
Grundbegriffe	37
Aufgaben. Durchschnitte der Geraden und Ebenen	47
Durch mancherlei Bedingungen bestimmte Gerade und Ebenen	54
Gerade, und perpendikuläre Ebenen	62
Winkel der Geraden und Ebenen	63
Kürzeste Entfernung zweier Geraden. Auflösungen der ver- schiedenen Fälle des dreiseitigen Winkels	73
<i>Zweite Abtheilung. Krumme Oberflächen und Berüh- rungsebenen</i>	81
Entstehung der Oberflächen	81
Berührungsebene und Normale	83
Verschiedene Arten der Oberflächen	86
Eigenschaften der windschiefen Revolutionsoberfläche	91
Vom Hyperboloid mit einem Mantel und dem hyperbolischen Paraboloid	100
Berührungsebenen an windschiefe Oberflächen	108
Aufgaben über die Berührungsebenen an developpablen Ober- flächen	112

	Seite
Aufgaben über die Berührungsebenen an Revolutionsoberflächen	119
Berührungsebene an die Kugel, durch eine gegebene Gerade	141
Berührungsebenen an die windschiefe Revolutionsoberfläche .	147
Berührungsebenen an einige, nicht durch Umdrehung ent- standene windschiefe Oberflächen	157
<i>Dritte Abtheilung. Krumme Linien mit ihren Tangenten</i>	170
Allgemeine Betrachtungen	170
Durchschnitte krummer Oberflächen durch Ebenen	175
Durchschnitte krummer Oberflächen unter sich	191
Schraubenlinie und sphärische Epicycloide	205
<i>Vierte Abtheilung. Uebungen</i>	215
Gegenstand dieser Uebungen	215
Einige Aufgaben über die Gerade und Ebene. Umschriebene und eingeschriebene Kugel	215
Durchschnitte einer Geraden mit einem Kegel oder Cylin- der, mit einer Kugel und windschiefen Revolutionsober- fläche	226
Einige Aufgaben über Berührungen und Oberflächendurch- schnitte	230

Einleitung.

Theorie der Ebene und der geraden Linie im Raume.

Erklärungen.

1. **E**ine Ebene nennt man eine Oberfläche, welcher eine gerade Linie sich genau anschliesst, sobald sie zwei Punkte mit derselben gemeinschaftlich hat.

Hat eine Gerade nur einen Punkt mit einer Ebene gemein, so ist es klar, dass dieselbe Theils auf der einen, Theils auf der anderen Seite dieser Ebene liegt.

Um Ebenen bildlich darzustellen, muss man denselben Grenzen setzen; sie sind aber immer als unbegrenzt zu betrachten.

2. Eine Gerade ist perpendikulär zu einer Ebene, wenn sie perpendikulär zu allen Geraden ist, welche durch den Fußpunkt derselben in dieser Ebene gezogen werden können.

Wenn eine Gerade perpendikulär zu einer Ebene ist, so sagt man umgekehrt, die Ebene sei perpendikulär zur Geraden.

Schief nennt man diejenigen Geraden, welche zwar eine Ebene schneiden, jedoch nicht perpendikulär zu ihr sind.

3. Sobald eine Gerade und eine Ebene einander nicht begegnen, wie weit man sie auch fortsetzt, dann

sagt man: die gerade Linie sei parallel zu der Ebene, oder die Ebene parallel zur Geraden.

4. Eben so sagt man, zwei Ebenen sind parallel, wenn sie sich nie treffen, so weit man sie auch fortsetzen mag.

5. Eine Ebene ist perpendicular zu einer anderen Ebene, sobald jene alle Perpendikel zu dieser enthält, welche in verschiedenen Punkten ihres Durchschnit-tes errichtet werden können.

Es wird gezeigt werden (35), daß dann auch die zweite Ebene perpendicular zur ersten ist.

6. Unter dem Winkel zweier Ebenen oder einfacher dem Flächenwinkel, versteht man den zwischen diesen Ebenen und ihrem Durchschnitte enthaltenen Raum.

Zwar zerfällt hierdurch der unbegranzte Raum in zwei Theile, welche der gegebenen Erklärung gleichzeitig entsprechen; inzwischen ist es stets der kleinere, welchen man den Flächenwinkel zu nennen pflegt.

Angenommen, es handele sich um den von den Ebenen ABM und ABN (Fig. 1.) eingeschlossenen Flächenwinkel; dann ist der Durchschnitt AB die Kante des Flächenwinkels, und die Ebenen ABM und ABN sind dessen Seiten. Man bezeichnet diesen Flächenwinkel durch $MABN$, dadurch, daß man die beiden Buchstaben an der Kante in die Mitte setzt.

7. Ein Körperwinkel oder polyedrischer Winkel ist der, zwischen mehreren in einem Punkte sich vereinigenden Ebenen, eingeschlossene Raum.

Es bilden mithin die Ebenen ASB , ASC und BSC (Fig. 2.) den Körperwinkel S . Die ebenen Winkel ASB , ASC und BSC sind die Seiten dieses Körperwinkels, die Durchschnitte SA , SB und SC dessen Kanten und S der dazu gehörige Scheitel.

Der Körperwinkel ist ein triedrisher, tetraedrisher, pentaedrisher je nachdem er drei, vier, fünf, etc. Seiten hat.

Sätze welche unmittelbar aus dem Begriffe der Ebene hervorgeh'n.

8. **Lehrsatz I.** Eine Gerade kann nicht zugleich in einer Ebene und aufserhalb derselben gelegen sein.

Denn nach der Erklärung (1.) liegt eine Gerade gänzlich in derjenigen Ebene, mit welcher sie zwei Punkte gemeinschaftlich hat.

9. **Lehrsatz II.** (Fig. 3). Durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte ist eine Ebene bestimmt.

Man nehme eine willkürliche Ebene, ziehe in ihr eine gerade Linie und gebe hierauf der Ebene eine solche Lage, daß jene Gerade durch die Punkte A und B hindurch geh't. Nun ist es klar, daß man die Ebene um die gerade Linie AB drehend bewegen kann, bis zu dem Punkte C hin, aber daß sie bei fortgesetztem Drehen diesen Punkt verlassen wird. Folglich kann man durch die drei Punkte, A, B, C , eine Ebene legen, indessen nur eine einzige.

Zusatz I. (Fig. 4). Zwei sich durchschneidende Gerade sind in einer Ebene enthalten, und bestimmen die Lage derselben. Der Durchschnittspunkt der zwei Geraden sei E , A und D mögen zwei, beziehentlich in einer jeden derselben gewählte Punkte bezeichnen. Daß eine Ebene die zwei Geraden enthalte, muß sie nothwendig durch die Punkte A, E und D gehen. Die so eben bezeichnete Ebene erfüllt diese Bedingung, aber auch nur sie allein.

Zusatz II. Zwei parallele Gerade bestimmen die Lage einer Ebene. Bekanntlich sind zwei parallele Gerade stets in einer Ebene enthalten. Gesetzt aber, man hätte zwei Ebenen durch diese Geraden, so ist es klar, daß, nähme man in einer derselben einen Punkt, in der anderen zwei Punkte, man so drei nicht in gerader Linie liegende Punkte hätte, durch welche zwei Ebenen geführt werden könnten.



10. **Lehrsatz III.** (Fig. 5). Zwei Ebenen schneiden sich in einer geraden Linie.

Ein Punkt A sei den beiden Ebenen MN und PQ gemeinschaftlich. In der Ebene PQ lege man durch den Punkt A zwei Gerade BC und DE . Oberhalb der Ebene MN werde der Punkt B der ersten, unterhalb der Punkt E der zweiten Geraden gewählt, endlich die Gerade BE gezogen. Die Linie BE liegt gänzlich in der Ebene PQ , da zwei Punkte derselben in ihr enthalten sind; sie muß die Ebene MN schneiden, da sie Theils ober-, Theils unterhalb derselben liegt. Es sei I der Durchschnittspunkt, so wird eine durch die Punkte A und I gehende Gerade, beiden Ebenen zugleich angehören; denn sie hat zwei Punkte A und I mit einer jeden derselben gemein. Ausserhalb dieser Geraden haben die Ebenen keinen Punkt gemeinschaftlich; sonst würde man durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte zwei verschiedene Ebenen legen können. Folglich ist der Durchschnitt beider Ebenen eine gerade Linie.

Ueberdies leuchtet ein, daß jede Ebene in zwei Theile getheilt wird, welche an den entgegengesetzten Seiten der anderen liegen.

Vom Perpendikel auf die Ebene

11. **Lehrsatz IV.** (Fig. 6). Wenn eine Gerade AB perpendicular zu zwei Geraden BC und BD ist, welche durch den Fußpunkt derselben in einer Ebene MN gehen, so ist sie perpendicular zu dieser Ebene.

Zur Begründung dieses Satzes muß dargethan werden, daß AB perpendicular zu jeder anderen Geraden, etwa BE ist, welche an den Fußpunkt derselben in dieser Ebene gezogen werden kann. (2.) Deshalb verlängere man AB auf die andere Seite der Ebene, bis $BH = AB$, ziehe die Gerade CD , welche die Linien BC , BD , BE in C , D , E schneidet, endlich CA , DA , EH , CH , DH , EH . Der Winkel ABC ist nach der Annahme ein

rechter, und folglich BC auf der Mitte von AH rechtwinklig, mithin $AC=HC$. Auf ähnliche Art ergibt sich $AD=HD$. Die Dreiecke ACD und HCD sind mithin congruent, demnach ist $\angle ACE=HCE$. Hieraus gehet die Gleichheit der Dreiecke AEC und HEC hervor, denn die an jene Winkel anschliessenden Seiten haben einerlei Grösse, und da alsdann den gleichen Winkeln auch gleiche Seiten gegenüber liegen, so ist $AE=HE$. Die Dreiecke ABE und HBE sind folglich congruent, mithin ist $\angle ABE=HBE$. Nun sind diese Winkel Nebenwinkel, folglich rechte, folglich ist AB perpendicular zu BE ; welches zu beweisen war.

12. **Lehrsatz V.** Durch einen gegebenen Punkt kann man stets ein Perpendikel zu einer Ebene ziehen, aber auch nur ein einziges.

Man hat hierbei zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der gegebene Punkt innerhalb oder aufser der Ebene gelegen ist.

Erster Fall. (Fig. 7). Es sei A der in der Ebene MN gegebene Punkt. In dieser Ebene ziehe man die Gerade BC willkürlich, jedoch so, dass sie durch den Punkt A nicht hindurchgeht, und AB perpendicular zu BC . Durch BC denke man sich irgend eine Ebene, und führe in ihr ein Perpendikel BH zu BC ; endlich noch eine Ebene durch AB und BH , so wie in derselben AH perpendicular zu AB . Nun wird behauptet, dass AH perpendicular zur Ebene MN sei.

Von dem Punkt A aus ziehe man zu BC irgend eine Gerade AC . H sei der Durchschnitt von AH und BH . Man verlängere AH um seine eigene Grösse d. h. mache $AI=AH$, und ziehe CH , CI , BI . Vermöge der Construction ist die Linie BC perpendicular zu BA und BH , folglich auch zur Ebene HBI ; folglich ist der Winkel CBI ein rechter. Eben so ist die Linie AB perpendicular in der Mitte von HI ; folglich $BH=BI$. Daraus folgt die Congruenz der Dreiecke BCH und BCI , woraus $CH=CI$; folglich ist AC perpendicular zu HI . Es

ist mithin die Gerade AH perpendicular zu den zwei Geraden AC und AB , folglich auch zur Ebene MN .

Dieses Perpendikel ist aber auch das einzige, welches zur Ebene MN durch den Punkt A errichtet werden kann. Wollte man ein zweites, etwa AR annehmen, so würde durch AH und AR eine Ebene gelegt werden können, welche in AS die Ebene MN durchschneidet. Nun aber, da die Linien AH und AR , perpendicular zur Ebene MN sind, so sollten sie es auch zu AS sein. (2.) Folglich würde man in derselben Ebene HAS durch denselben Punkt zwei Perpendikel zu einer Geraden ziehen können, welches unmöglich ist.

Zweiter Fall (Fig. 7). Es sei H ein, ausserhalb der Ebene MN gegebener Punkt. In dieser Ebene ziehe man eine Gerade, etwa BC , und zu ihr HB perpendicular; ferner in der Ebene MN , BA perpendicular zu BC , endlich HA perpendicular zu BA , so wird die Linie HA perpendicular zur Ebene MN sein. Der Beweis wird ganz so wie im ersten Falle geführt, und bedarf der Wiederholung nicht.

Ueberdies ist das Perpendikel HA das einzige, welches vom Punkte H aus zur Ebene MN gezogen werden kann, denn nähme man ein zweites HS an, so würde das Dreieck HAS zwei rechte Winkel HAS und HSA haben.

13. Lehrsatz VI. (Fig. 8). Das Perpendikel AB , aus einem Punkte A auf eine Ebene MN gefällt, ist die kürzeste Linie zwischen diesem Punkte und der Ebene.

Denn zieht man irgend eine andere Gerade etwa AC zu dieser Ebene, und verbindet B mit C , so ist das Dreieck ABC bei B rechtwinklig, folglich $AB < AC$.

Anmerkung. Dieses Perpendikel AB ist es, welches die Entfernung des Punktes A von der Ebene MN misst.

14. Lehrsatz VII. Durch einen gegebenen Punkt kann man eine perpendikuläre

Ebene zu einer Geraden ziehen, aber auch nur eine.

Erster Fall (Fig. 9). Wenn der gegebene Punkt O in der Geraden AB liegt, so führe man zwei Ebenen durch diese Gerade, und errichte in denselben die Perpendikel OC , OD , zu AB ; dann ist die durch OC , OD gelegte Ebene MN perpendikulär zur Geraden AB . Denn hiernach ist AB perpendikulär zu zwei Geraden, welche durch den Fußpunkt derselben in der Ebene MN gehen; folglich ist sie perpendikulär zu dieser Ebene, folglich umgekehrt die Ebene MN perpendikulär zu AB .

Jede andere, durch den Punkt O gehende Ebene, wie MR ist nicht perpendikulär zu AB ; denn wäre die Ebene MR , perpendikulär zu AB , so könnte man durch AB eine Ebene legen, welche die beiden Ebenen MN und MR in den zwei Geraden, wie OE und OF schnitte, und da die Gerade AB perpendikulär zu den zwei Ebenen ist, so sollte sie es auch zu jenen zwei Linien sein. Folglich würden die, in der Ebene ABE , aus demselben Punkte O entspringenden Geraden OE und OF perpendikulär zu AB sein, was unmöglich ist.

Zweiter Fall. (Fig. 10). Angenommen der gegebene Punkt O sei außerhalb der Geraden AB . Man ziehe OC perpendikulär zu AB , und hiermit ein anderes Perpendikel CD zu AB ; dann ist die durch OC und CD gehende Ebene MN perpendikulär zu AB . Der Beweis wird wie vorhin geführt.

Jede andere durch den Punkt O gehende Ebene OR ist nicht perpendikulär zu AB . In der That, eine durch den Punkt O und die Gerade AB geführte Ebene würde die Ebenen MN und OR in zwei Geraden OC und OE , welche perpendikulär zu AB sind, schneiden. Was unmöglich ist.

15. Lehrsatz VIII. (Fig. 11). Alle aus demselben Punkt B einer Geraden AB errichteten Perpendikel BC , BD , BE sind in einer zu dieser Geraden im Punkte B perpendikulären Ebene enthalten.

Eine derselben z. B. BC sei nicht in der Ebene MN gelegen, so führe man durch AB und BC eine Ebene, welche die Ebene MN in einer Geraden BC' durchschneidet. Da die Gerade AB perpendicular zur Ebene MN ist, so muß sie es auch zu BC' sein; demnach gehen in derselben Ebene ABC aus dem Punkte B zwei Perpendikel BC und BC' zur Geraden AB , welches unmöglich ist. BC ist folglich in der Ebene MN enthalten. Dieselbe Schlussfolge läßt sich auch auf die anderen Geraden BD , BE etc. anwenden.

16. **Lehrsatz IX.** (Fig. 12). Wenn eine Ebene MN perpendicular zu einer Geraden AB durch deren Mitte C geht, so ist jeder Punkt in dieser Ebene gleichweit, jeder Punkt auferhalb derselben aber ungleichweit von den Endpunkten der Geraden entfernt.

Durch irgend einen Punkt H der Ebene MN ziehe man AH , BH , CG , so sind die beiden Dreiecke ACH und BCH rechtwinklig und congruent; folglich ist $AH = BH$; folglich jeder Punkt der Ebene gleichweit von den Punkten A und B entfernt.

Es sei I ein Punkt auferhalb der Ebene MN , dann ziehe man AI und BI . Die Linie AI schneidet die Ebene MN in einem Punkte H ; man ziehe BH . Da der Punkt H der Ebene MN angehört, so hat man $AH = BH$; es ist aber $BI < BH + HI$, folglich auch $BI < AH + HI$ oder $BI < AI$. Demnach ist jeder, auferhalb der Ebene MN gelegene Punkt ungleichweit von A und B entfernt.

Von den Schrägen zur Ebene.

17. **Lehrsatz X.** (Fig. 13). Schräge, welche vom Perpendikel gleichweit abstehen sind gleich; und von zwei ungleich vom Perpendikel abstehenden Schrägen ist diejenige die kleinere, welche weniger weit absteht.

Es sei AB ein Perpendikel zur Ebene MN , und AC , AD , AE mögen verschiedene Schrägen aus demselben Punkte A sein; dann ziehe man BC , BD , BE .

Setzt man $BC = BD$, so sind die Dreiecke ABC und ABD congruent; folglich ist $AC = AD$, und darum sind die Schrägen von gleicher Abweichung zum Perpendikel gleich.

Ist aber $BC < BE$, so nehme man auf BE $BF = BC$, und dann ist die Schräge $AF = AC$. Weil aber AF und AE mit der zu BE perpendicularen Linie AB in derselben Ebene liegen, so hat man $AF < AE$, mithin auch $AC < AE$, folglich ist jene Schräge, welche sich dem Perpendikel am meisten anschliesst, die kürzere.

Zusatz. Hieraus ergibt sich ein Verfahren, aus einem Punkt A ein Perpendikel zu einer Ebene MN zu fallen. Man nehme eine unbiegsame, hinreichend lange Gerade, befestige das eine Ende derselben am Punkte A , und bezeichne mit dem anderen Ende drei Punkte C , D , F in der Ebene MN . Auf solche Art sind die Geraden AC , AD und AF schräge Linien von gleicher Länge, und deshalb die Punkte C , D , F gleichweit vom Fusspunkte des verlangten Perpendikels entfernt. Folglich ist der Mittelpunkt des durch diese drei Punkte beschriebenen Kreises der Fusspunkt dieses Perpendikels.

18. Lehrsatz XI. (Fig. 14). Fällt man aus irgend einem Punkte einer zur Ebene MN schiefen Geraden AB ein Perpendikel AC auf diese Ebene, und verbindet den Fusspunkt derselben und den des Perpendikels durch eine Gerade AD , so schliesst die Schräge mit der Geraden einen Winkel ABC ein, welcher kleiner als jeder andere ist, den sie mit irgend einer, aus ihrem Fusspunkte in der Ebene gezogenen Geraden BD bildet.

Es kommt hierbei darauf an zu zeigen, dass der Winkel ABC kleiner ist, als der Winkel ABD . Zu diesem Behuf nehme man $BD = BC$ und verbinde A und D . Da das Perpendikel AC kleiner als AD ist, so sind die

Seiten AB und BC des Dreieckes ABC , den Seiten AB , BD des Dreieckes ABD gleich, und die dritte Seite AC ist kleiner als AD , folglich ist der Winkel ABC kleiner als ABD .

Zusatz I. Dieser Eigenschaft wegen pflegt man durch den Winkel ABC die Grösse der Neigung der Schrägen AB zur Ebene MN zu messen.

Zusatz II. Wenn man durch einen anderen Punkt der Schrägen AB ein Perpendikel auf die Ebene MN zieht, so fällt der Fusspunkt desselben mit der Linie BC zusammen. Denn, nach dem soeben bewiesenen Lehrsatz, wird diejenige Gerade welche den Fusspunkt dieses Perpendikels mit dem Punkte B verbindet, mit AB einen Winkel einschliessen, kleiner als mit jeder andern durch den Punkt B in der Ebene MN gehenden Geraden. Folglich fällt diese Gerade mit BC zusammen.

19. **Lehrsatz XII.** (Fig. 15). Wenn eine Gerade AB perpendikulär zu einer Ebene MN ist, und man vom Fusspunkt derselben, B zu einer in dieser Ebene vorhandenen Geraden CD zieht, hierauf A und E verbindet, so ist die Gerade AE eine Schräge zur Ebene, perpendikulär zu CD .

Man nehme $EC = ED$, und ziehe BD , AD , AE . Da nun BE perpendiculär zu CD ist, und $EC = ED$, so folgt $BC = BD$, und da AB perpendikulär zur Ebene MN und BC gleich BD ist, so folgt, dass die Schräge $AC = AD$. Demnach ist jeder der Punkte A und E gleichweit von C und D entfernt, folglich AE perpendikulär zu CD .

Parallelele Gerade im Raume.

20. **Lehrsatz XIII.** (Fig. 16). Durch einen Punkt im Raume kann nur eine Parallelele zu einer gegebenen Geraden gezogen werden.

Hätte man durch den Punkt C zwei Parallelen CD und CE zur Geraden AB , so müsste jede derselben in

der durch die Gerade AB und den Punkt C gehende Ebene enthalten sein; folglich gingen in einer Ebene zwei Parallelen zu einer Geraden durch den nämlichen Punkt, was unmöglich ist.

Zusatz. Sobald zwei Gerade Parallelen sind, dann enthält eine durch die erste und einen Punkt der zweiten gehende Ebene letztere ganz und gar.

21. **Lehrsatz XIV.** (Fig. 17.) Zwei parallele Gerade sind perpendicular zu derselben Ebene.

Das heist, wenn AB perpendicular zur Ebene MN ist, so ist es die zu AB parallele CD auch.

Man denke sich durch die Parallelen AB und CD eine Ebene gelegt, deren Durchschnitt mit der Ebene MN , BD sei, ziehe in dieser Ebene DE perpendicular zu BD , und vereinige A und D . In Folge des XII. Lehrsatzes ist AD perpendicular zu DE , mithin DE perpendicular zu den zwei Geraden DB und DA , demnach auch zur Ebene $ABDC$ der zwei Parallelen. Hieraus ergibt sich, dafs der Winkel CDE ein rechter ist. Da aber CD parallel zum Perpendikel AB ist, so ist der Winkel CDB auch ein rechter, folglich CD perpendicular zu den zwei Linien DE , DB , und folglich auch perpendicular zur Ebene MN .

22. **Lehrsatz XV.** (Fig. 17.) Zwei zu der nämlichen Ebene MN perpendicularen Geraden AB , CD , sind sich parallel.

Wär' CD keine Parallele zu AB , so sei DR eine solche. Nach dem vorangegangenen Lehrsatze würde DR perpendicular zur Ebene MN sein; man hätte folglich für den Punkt D zwei Perpendikel zur Ebene MN , was unmöglich ist (12).

23. **Lehrsatz XVI.** (Fig. 18.) Zwei zu einer dritten Geraden C parallele Gerade A und B sind parallel unter sich.

Es werde zu der Geraden C eine perpendicularäre Ebene PQ geführt. Die Geraden A und B sind parallel zu C , sie sind also perpendicular zur Ebene PQ (21):

daraus nun, weil sie perpendicularär zu dieser Ebene sind, folgt ihr gegenseitiges Parallelsein (22).

Zusatz (Fig. 19). Wenn man durch zwei Parallelen AB und CD zwei sich schneidende Ebenen legt, so ist ihr Durchschnitt EF parallel zu jenen Geraden. Denn durch einen in EF genommenen Punkt E , führe man in der Ebene AF eine Parallele zu AB , so wird sie auch parallel zu CD sein, und folglich auch in der Ebene DE liegen (20), welche Linie mithin keine andere ist, als der Durchschnitt EF .

Die gerade Linie und die zu ihr parallele Ebene.

24. Lehrsatz XVII. (Fig. 20). Jede Gerade CD , welche parallel zu einer in einer Ebene MN gelegenen Geraden AB ist, ist parallel zu dieser Ebene.

Da die Linien AB und CD parallel sind, so liegen dieselben in einer Ebene, deren Durchschnitt mit der Ebene MN die Linie AB ist. Wenn daher CD die Ebene MN schneiden könnte, so wäre dies nur in einem Punkte der Geraden AB möglich. Dann aber würde CD nicht parallel zu AB sein, welches gegen die Voraussetzung ist.

25. Lehrsatz XVIII. (Fig. 21). Wenn eine Gerade AB perpendicularär zu einer Ebene MN ist, so ist jede zu AB perpendicularäre Gerade AC parallel zu dieser Ebene.

Die Linie AB ist perpendicularär zur Ebene MN , und AC perpendicularär zu AB . Wenn nun AC der Ebene MN begegnen könnte, so würde, verbinde man den Durchschnittspunkt O mit dem Punkte B , ein Dreieck OAB mit zwei rechten Winkeln entstehen, was unmöglich ist; folglich ist die Gerade AB parallel zur Ebene MN .

26. Lehrsatz XIX. (Fig. 20). Wenn eine Gerade CD parallel zu einer Ebene MN ist, und man eine Ebene CDB durch diese Gerade

legt, so wird der Durchschnitt AB dieser zwei Ebenen parallel zur Geraden CD sein.

Da die Linie CD parallel zur Ebene MN ist, so wird sie AB nicht treffen. Sie liegt überdiess mit AB in einer und derselben Ebene, folglich ist sie parallel zu AB .

Zusatz I. Da die Gerade CD parallel zur Ebene MN ist, so wird eine Parallele AB zu CD durch einen Punkt A der Ebene MN ganz und gar in dieser Ebene liegen. Verhielt es sich anders, so würde die Ebene der Parallelen AB und CD die Ebene MN in einer durch den Punkt A gehenden Geraden schneiden, welche nach dem vorigen Lehrsatz parallel zu AB sein müßte; folglich gäb' es durch einen und denselben Punkt der nämlichen Ebene zwei Parallelen zu CD , was unmöglich ist.

Zusatz II. Eine parallele Gerade zu zwei sich schneidenden Ebenen ist parallel zu dem Durchschnitte derselben. Denn wenn man durch einen Punkt des Durchschnittes eine Parallele zu der Geraden führt, so wird (nach dem vorigen Zusatze) diese Parallele in einer jeden der zwei Ebenen enthalten sein; folglich ist sie keine andere als die Durchschnittslinie derselben.

27. Lehrsatz XX. (Fig. 20). Die von einer Geraden und hierzu parallelen Ebene eingeschlossenen Parallelen AC und BD sind gleich.

Da die Ebene der zwei Parallelen (die Ebene MN in AB , einer Parallelen zu CD , schneidet, so ist die Figur $ABDC$ ein Parallelogramm, und folglich $AC = BD$.

Zusatz. Hat man AC und BD perpendicularär zur Ebene MN , so sind diese Linien Parallelen unter sich, und die Winkel bei A, B, C, D rechte. Weil also immer $AC = BD$, so folgt, dafs eine parallele Gerade zu einer Ebene überall in gleicher Entfernung von dieser Ebene ist.

Parallele Ebenen unter sich.

28. **Lehrsatz XXI.** (Fig. 22). Wenn zwei Ebenen MN und PQ perpendicular zu derselben Geraden AB sind, so sind sie parallel unter sich.

Angenommen, die Ebenen MN und PQ könnten einander begegnen, und O sei ein Punkt ihres Durchschnittes, so denke man sich von A und B aus, wo sie AB schneiden, die Gerade OA und OB gezogen. Da die Linie AB perpendicular zu den zwei Ebenen ist, so sind die Winkel A und B des Dreiecks ABO rechte, was unmöglich ist. Folglich begegnen sich diese Ebenen nicht, und sind mithin parallel.

29. **Lehrsatz XXII.** (Fig. 23). Die Geraden AB und CD , welche aus den Durchschnitten zweier parallelen Ebenen MN und PQ mit einer dritten Ebene RS hervorgehen, sind parallel unter sich.

In der That, es können sich die Geraden AB und CD nicht begegnen: denn sonst würden die Ebenen MN und PQ convergiren, und also nicht parallel sein. Ueberdies sind diese Geraden in einer und derselben Ebene RS enthalten, folglich zu einander parallel.

Zusatz (Fig. 24). Durch einen Punkt A kann man nur eine einzige Ebene parallel zu einer gegebenen Ebene MN führen. Gesetzt es wäre möglich zwei Ebenen PQ und PR durch ihn zu legen. Alsdann denke man sich irgend eine Ebene durch den Punkt A gehend, und bezeichne durch AB , AC , DE deren Durchschnitte mit den Ebenen PQ , PR , MN . Dem vorigen Lehrsatze zufolge müßte nun jede der Geraden AB und AC parallel zu DE sein, was unmöglich ist.

30. **Lehrsatz XXIII.** (Fig. 25). Wenn zwei Ebenen MN und PQ parallel sind, so ist jedes Perpendikel AB zu einer derseben auch ein Perpendikel zur andern.

Angenommen, AB sei perpendicularär zur Ebene MN , so ziehe man durch den Punkt B die willkührliche Gerade in der Ebene PQ , und lege durch AB und BC eine Ebene. Es wird der Durchschnitt dieser Ebene mit MN eine zu BC parallele Gerade AD sein (vorig. Lehrs.). Nun aber ist das Perpendikel AB zur Ebene MN perpendicularär zu AD , folglich auch zur Parallele BC . Es ist daher die Linie AB perpendicularär zu einer jeden durch ihren Fußpunkt in der Ebene PQ gehenden Geraden, folglich perpendicularär zu dieser Ebene.

31. **Lehrsatz XXIV.** (Fig. 26). Zwei, zu einer dritten Ebene R parallele Ebenen P und Q , sind parallel zu einander.

Zieht man eine Gerade AC perpendicularär zur Ebene R , so ist sie auch perpendicularär zu den Ebenen P und Q (30). Die Ebenen P und Q sind folglich perpendicularär zur Geraden AC , und darum parallel (28).

32. **Lehrsatz XXV.** (Fig. 27). Die von zwei parallelen Ebenen MN und PQ eingeschlossenen Parallelen AB und CD sind gleich.

Die Ebenen MN und PQ werden durch die Ebene der zwei Linien AB und CD in den Parallelen AC und BD durchschnitten; folglich ist die Figur $ABDC$ ein Parallelogramm, folglich $AB = CD$.

Zusatz. Wenn die Linien AB und CD perpendicularär zur Ebene MN sind, so sind sie parallel unter sich und folglich gleich; demnach stehen zwei parallele Ebenen überall gleichweit von einander ab.

33. **Lehrsatz XXVI.** (Fig. 28). Sind die Schenkel zweier nicht in der nämlichen Ebene gelegenen Winkel zu eiander parallel, und nach derselben Seite gelegen, so sind diese Winkel gleich, und ihre Ebenen parallel.

Es mögen die Geraden AB , AC beziehentlich parallel zu DE und DF sein, dann nehme man $AB = DE$,

$AC = DF$, und ziehe BC , EF , AD , BE , CF . Da AB gleich und parallel zu DE ist, so ist die Figur $ABED$ ein Parallelogramm; folglich BE gleich und parallel zu AD . Eben so, weil AC gleich und parallel zu DF , so ist die Gerade CF gleich und parallel zu AD ; mithin CF gleich und parallel zu BE und in Folge dessen BC gleich EF . Die Dreiecke ABC und DEF sind folglich congruent und darum ist der Winkel $BAC = EDF$.

Ferner wird behauptet, dass die Ebenen ABC und DEF parallel sind. Durch den Punkt D führe man eine Ebene $DE'F'$ parallel zur Ebene ABC , deren Durchschnitte mit BE und CF die Punkte E' und F' sein mögen. Die Linien AD , BE' , CF' sind gleich, als Parallelen zwischen parallelen Ebenen (32). Man hat aber schon $AD = BE = CF$, folglich wird man auch haben: $BE = BE'$ und $CF = CF'$. Es folgt hieraus, dass der Punkt E' mit E , der Punkt F' mit F , und die Ebene $DE'F'$ mit DEF zusammenfällt; daher ist die Ebene DEF parallel zur Ebene ABC .

Zusatz. Durch zwei, nicht in einer Ebene befindliche Gerade AC und DE kann man stets zwei parallele Ebenen legen. Denn hat man willkürlich den Punkt A in der einen, und den Punkt D in der anderen genommen, so ziehe man AB parallel zu DE , und DF parallel zu AC . Alsdann führe man zwei Ebenen, die eine durch die Geraden DE , DF . In Folge des so eben bewiesenen Lehrsatzes sind diese zwei Ebenen parallel unter sich.

34. Lehrsatz XXVII. (Fig. 29). Von irgend zwei Geraden im Raume schneiden drei parallele Ebenen proportionirte Stücke ab.

Angenommen, drei parallele Ebenen P , Q , R schneiden zwei Gerade AC und DF in den Punkten A , B , C , D , E , F ; so wird behauptet, dass $AB : BC :: DE : EF$ sei.

Parallel zu AC ziehe man DH , welche Ebenen Q und R in G und H schneidet. Die Geraden GE und HF sind parallel, als Durchschnitte der parallelen Ebenen Q und R , mit der Ebene DFH ; demnach $DG : GH ::$

8. $DE : DF$. Es ist aber $DG = AB$ und $GH = BC$ (32), folglich $AB : BC :: DG : EF$.

Perpendikuläre Ebenen unter sich.

35. **Lehrsatz XXVIII.** (Fig. 30). Errichtet man auf einer Ebene MN ein Perpendikel AB , und führt hierauf durch dasselbe eine Ebene PQ , so ist diese Ebene perpendikulär zu MN , und umgekehrt die Ebene MN perpendikulär zu PQ .

Soll nach der Erklärung (5) die Ebene PQ perpendikulär zur Ebene MN sein, so ist darzuthun, daß sie die Perpendikel zur Ebene MN enthält, welche aus verschiedenen Punkten des Durchschnittes QR beider Ebenen errichtet werden können. Nun aber ist (22) ein aus irgend einem Punkte von QR zur Ebene MN errichtetes Perpendikel CD , parallel zu AB , folglich in der Ebene PQ gelegen (20), und mithin die Ebene PQ perpendikulär zur Ebene MN .

Umgekehrt, kann gezeigt werden, daß die Ebene MN perpendikulär zur Ebene PQ ist. Auf der Ebene MN nehme man CE perpendikulär zu QR , und verbinde die Punkte C und B , so ist die Linie CE auch perpendikulär zu BC (19). Da nun CE den Linien QR und BC zugleich perpendikulär ist, so ist folglich CE perpendikulär zur Ebene PQ . Man kann daher sagen: alle zur Ebene PQ aus verschiedenen Punkten der Linie QR errichteten Perpendikel sind in der Ebene MN enthalten; mithin ist die Ebene MN perpendikulär zur Ebene PQ .

Zusatz I. Dieser Beweis bestätigt, daß wenn zwei Ebenen unter sich perpendikulär sind, jede Gerade in einer derselben, und perpendikulär zu ihrem Durchschnitte, perpendikulär zur andern Ebene ist.

Zusatz II. Wenn drei durch einen Punkt gehende Gerade perpendikulär unter sich sind, so ist jede derselben perpendikulär zur Ebene der beiden andern (11),

und die drei Ebenen sind perpendikulär unter einander.

36. **Lehrsatz XXIX.** (Fig. 31). Ist von zwei Ebenen MN und PQ eine der anderen perpendikulär, so ist jedes Perpendikel zu einer derselben, z. B. zu MN durch einen Punkt A der andern Ebene, in der letzteren enthalten.

Angenommen, es sei dasselbe außerhalb der Ebene PQ gelegen, und man habe AC perpendikulär zum Durchschnitt QR gezogen. Nach der Erklärung (5) soll das, zur Ebene MN durch den Punkt C errichtete Perpendikel in der Ebene PQ enthalten sein. Nun aber ist diese Linie perpendikulär zu QR , folglich keine andere als AC . Demnach könnte man durch denselben Punkt A zwei Perpendikel zur Ebene MN führen, was ungereimt ist.

Zusatz. Durch eine, zu einer Ebene nicht perpendikuläre Gerade läßt sich nur eine perpendikuläre Ebene zu dieser Ebene legen. Denn nach obigem Lehrsatz soll die perpendikuläre Ebene außer der gegebenen Geraden ein Perpendikel enthalten, welches aus irgend einem Punkte derselben auf die gegebene Ebene gefällt wird; nun aber kann man durch zwei Gerade nur eine einzige Ebene führen.

37. **Lehrsatz XXX.** (Fig. 32). Der Durchschnitt AB zweier, zu einer dritten Ebene MN perpendikulären Ebenen PQ und RS ist perpendikulär zu dieser dritten.

Wird durch einen Punkt B des Durchschnitts AB ein Perpendikel auf die Ebene MN gefällt, so liegt solches in jeder der zwei Ebenen (36), folglich kann dasselbe nur der Durchschnitt AB sein.

Zusatz I. Eine zu zwei sich schneidenden Ebenen perpendikuläre Ebene, ist perpendikulär zu deren Durchschnitt.

Zusatz II. Wenn drei Ebenen perpendikulär unter sich sind, so ist der Durchschnitt zweier derselben perpendikulär unter einander.

38. **Lehrsatz XXXI.** (Fig. 33). Zwei Ebenen AQ , CS , welche perpendikulär zu einer dritten Ebene MN sind, und durch zwei, zu dieser Ebene nicht perpendikuläre Parallelen AB und CD gehen, sind parallel unter sich.

Sind PQ und RS die Durchschnitte der Ebene MN mit den zwei zu ihr perpendikulären Ebenen, dann ziehe man in denselben die Geraden AP , CR beziehentlich perpendikulär zu PQ und RS . Diese Geraden sind perpendikulär zur Ebene MN , und folglich parallel (22); demnach haben die Winkel BAP , DCR parallele Schenkel, und mithin sind die Ebenen AQ , CS parallel (33).

Kürzeste Entfernung zweier Geraden.

39. **Lehrsatz XXXII.** (Fig. 34). Sind zwei, nicht in einer Ebene gelegene Gerade AB und CD gegeben, so kann man 1) eine Gerade ziehen, welche beiden zugleich perpendikulär ist, 2) nur eine einzige; 3) ist diese Perpendikuläre die kürzeste Entfernung zwischen den zwei Geraden.

Durch irgend einen Punkt der Geraden AB ziehe man AE parallel zu CD , und führe die Ebene MN durch AB und AE . Ferner fälle man aus einem beliebigen Punkt der Geraden CD ein Perpendikel DF auf die Ebene, und ziehe in dieser Ebene zu AE parallel FG , deren Begegnungspunkt mit AB G sei; endlich GH parallel zu DF .

Die zu AE parallelen Geraden FG , CD sind parallel unter sich (23); folglich liegt GF in derselben Ebene mit CD und DF . Daher ist die zu DF parallele GH auch in der nämlichen Ebene enthalten, und schneidet CD . Anderer Seits, da die Linie DF perpendikulär zur

Ebene MN gezogen wurde, so ist die Parallele GH derselben auch perpendicular zu dieser Ebene (21), und folglich zu den Geraden AB und GF . Aber GF war parallel zu CD , woraus sich ergibt, dass GH perpendicular zu CD ist. Demnach lässt sich 1) eine Gerade ziehen, welche zu den Geraden AB und CD zugleich perpendicular ist.

Gesetzt, es könnte eine andere Gerade IK perpendicular zu diesen Geraden sein. Zieht man dann in der Ebene MN IL parallel zu AE , so ist die Linie IK perpendicular zu AB und IL , folglich auch zur Ebene MN . Zieht man aber parallel zu DF die, in die Ebene CDF hineinfallende Gerade KO , so ist diese Linie auch perpendicular zur Ebene MN . Man erhielt daher zwei aus dem Punkte K auf die Ebene MN gefällte Perpendikel, was unmöglich ist. Mithin giebt es 2) nur eine einzige Gerade, welche für AB und CD zugleich perpendicular ist.

Welches auch die kürzeste Linie sei, die man zwischen AB und CD ziehen könnte, eine gerade müßte sie doch sein: sonst würde man, ohne deren Endpunkte zu verändern, zwischen denselben eine gerade Linie führen, welche kürzer wäre. Es kann ferner diese gerade Linie von GH nicht verschieden sein. Gesetzt, es wäre dieselbe IK , so ziehe man noch die Parallele KO zu DF . Da die Linie KO perpendicular und KI eine Schräge zur Ebene MN ist, so hat man $KO < KI$, aber $GH = KO$ (32); folglich ist $GH < KI$, demnach 3) die Gerade GH die kürzeste Entfernung von AB zu CD .

Von den durch Ebenen gebildeten Winkeln.

40. **Lehrsatz XXXIII.** (Fig. 35). Das Maass eines Flächenwinkels ist derjenige Winkel, welchen zwei nach einem und demselben Punkte der Kante in den Seiten gezogene Perpendikel einschließen.

Zuvörderst hat man darzuthun, daß jeder Winkel der Perpendikulären der nämliche ist, an welchem Punkte der Kante er auch gebildet werde. Zu diesem Behufe ziehe man in den Seiten BAM , BAN zur Kante AB die Perpendikel AM und BP , AN und PQ , so sind die Geraden AM und AN beziehentlich parallel zu BP und PQ ; folglich ist der Winkel $MAN = PBQ$ (33).

Ferner ist zu zeigen, daß sich der Winkel der Perpendikulären in demselben Verhältniß ändert, wie der Winkel der Ebenen. Gesetzt, die Ebene BN habe — sich um AB drehend — die Lage BAG angenommen, und das Perpendikel AN sei nach AG gelangt. Da die Ebene MAN perpendikulär zu AB ist, so muß die Linie AG in dieser Ebene gelegen sein (15). Dieß vorausgesetzt, so wird nun behauptet, daß unter den Flächenwinkeln $MABN$ und $MABG$ die Proportion

[a] $MABN : MABG :: MAN : MAG$ besteht.

Betrachten wir den Fall, wobei die Winkel MAN und MAG ein gemeinschaftliches Maß haben, und stellen durch m und n die ganzen Zahlen dar, welche ausdrücken, wie oft sie dasselbe enthalten, dergestalt, daß:

$MAN : MAG :: m : n$ sei.

Trägt man dieses gemeinschaftliche Maß auf den Winkel MAN so oft auf, als es in demselben enthalten ist, so wird dieser Winkel in m gleiche Theile getheilt, und MAG n derselben in sich begreifen. Werden ferner durch die Kante AB , und jede der Theilungslinien Ax , Ay , Az des Winkels MAN Ebenen gelegt, dann zerfällt der Flächenwinkel $MABN$ in m Theile. Wird nun einer dieser Theile z. B. $MABx$ genommen und drehend um AB bewegt, so ist es klar, daß der Winkel MAx niemals die Ebene MAN verläßt, sich allmählig über jeden der Partialwinkel xAy , yAG , ... legt, und daß folglich der Flächenwinkel $MABx$ selbst nach und nach mit einem jeden von denen zusammen-

fällt, deren Vereinigung der Flächenwinkel $MABN$ ist. Der Flächenwinkel $MABN$ enthält demnach m mal den Partialwinkel $MABx$, und der Flächenwinkel $MABG$ n mal denselben, daher

$$MABN : MABG :: m : n$$

Durch Vergleichung dieser Proportion mit der vorigen ergibt sich:

$$MABN : MABG :: MAN : MAG.$$

Die Richtigkeit der Proportion $[a]$ erscheint daher für den Fall bewiesen, wenn die Winkel MAN und MAG commensurabel sind.

Sind die Winkel MAN und MAG incommensurabel, so kann vermittelst der bekannten Schlussfolge gezeigt werden, daß die Proportion $[a]$ auch dann noch wahr ist. In allen Fällen wird folglich der Flächenwinkel durch den Winkel der Perpendikulären gemessen.

41. Anmerkung I. In der bekannten Schlussfolge, worauf ich so eben für den Fall der Incommensurabeln verwies, ist die Strenge mehr scheinbar, als wirklich; denn man stützt sich darin auf die Eigenschaften der Proportionen, Eigenschaften, welche immer Verhältnisse unter commensurabeln Grössen voraussetzen. Aus diesem Grunde schlage ich hier einen neuen Beweis vor, welcher überdies den Vorzug hat, beide Fälle in sich zu vereinigen. Es ist aber zuvor eine Erklärung von dem Verhältniß zu geben, welche sich auf incommensurable Grössen anwenden läßt.

Zur bessern Festsetzung der Begriffe wollen wir es mit der Vergleichung zweier Linien AB und CD (Fig. 36) zu thun haben. Man trage die kleinere CD auf die größere AB : sie sei α mal darin enthalten und EB der Rest. Es werde nun CD in 2, 3, 4, ... gleiche Theile getheilt, bis eine Unterabtheilung erhalten wird, welche auf AB getragen, einen Rest $FB < EB$ übrig läßt. α' sei die Zahl, welche ausdrückt, wie oft dieselbe in AB enthalten ist, abgesehen von dem Reste FB , und β' die Zahl welche anzeigt, wieviel mal diese auf CD sich auftragen

läßt. Es werde noch CD in eine grössere Anzahl gleicher Theile getheilt, bis ein solcher sich findet, welcher auf AB getragen, einen Rest $GB < FB$ übrig läßt, und α'' und β'' mögen die Zahlen sein, welche angeben, wievielmals dieselbe in AB und CD enthalten ist. Man denke sich eine fortgesetzte Theilung von CD in immer kleiner werdende gleiche Theile, wobei man wie oben Rücksicht auf die Unterabtheilungen nimmt, welche immer kleinere und kleinere Reste übrig lassen. Die Verhältnisse der Längen $AE, AF, AG \dots$ zu CD werden durch $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha'}{\beta'}, \frac{\alpha''}{\beta''}, \dots$ ausgedrückt.

Diese Längen wachsen, und je nachdem AB commensurabel oder incommensurabel mit CD ist, so läßt sich eine Länge finden, welche entweder genau AB gleich kommt, oder so wenig davon abweicht, als man nur immer will. Zugleich wachsen auch die obigen Verhältnisse und nähern sich augenscheinlich einer bestimmten Gränze, welche völlig angebbar sein wird, oder der man sich beliebig nähern kann. Welches auch diese Gränze sein mag, sie ist das Verhältniß von AB zu CD .

Dies vorausgesetzt, so denke man sich den Winkel MAG (Fig. 35) in β gleiche Theile eingetheilt, und einer dieser Theile habe auf MAN eine gewisse Anzahl Mal etwa α mal übertragen werden können, unberücksichtigt des Restes. Führt man Ebenen durch die Kante AB und durch die in der Ebene MAN enthaltenen Eintheilungslinien, so wird der Flächenwinkel $MABG$ auch in β gleiche Theile getheilt werden, und der Flächenwinkel $MABN$ deren α enthalten (mit einem zu vernachlässigenden Reste). Dasselbe findet statt, wenn man die Winkel MAG in eine grössere Anzahl gleicher Theile zerlegt, woraus hervorgeht, daß wenn das Verhältniß von MAN zu MAG die Gränze der Brüche $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha'}{\beta'}, \frac{\alpha''}{\beta''}, \dots$ ist, so ist dasjenige der Flächenwinkel $MABN$ und $MABG$ die Gränze der nämlichen Brüche. Diese Verhältnisse

sind folglich gleich, und mithin ist die Proportion [a] bewiesen.

42. Anmerkung II. Man darf nicht übersehen, dafs, wenn die Geraden AM , AN (Fig. 37) in den zwei Seiten nicht perpendicular zu AB wären, der Winkel MAN den Flächenwinkel nicht mehr messen würde. Zuvörderst ist es klar, dafs, wenn diese Geraden mit AB ungleiche Winkel CAM , CAN bilden, und der Flächenwinkel bis zu Null herabsinkt, der Winkel MAN nicht Null werden wird; folglich müssen die Winkel CAM , CAN gleich sein.

Nehmen wir daher die zu AB gleich geneigten Linien AM und AN , und zeigen, dafs der Winkel dieser Schrägen sich nicht nach demselben Verhältnifs ändert, als derjenige der Ebenen. Zu diesem Zwecke ändern wir die Lage der Ebene BAN , und nehmen an, dafs dieselbe nach BAG und AN nach AG kommt. Sollten die Winkel der Schrägen die der Ebenen messen, so hätte man:

$$MABN : MABG : GABN :: MAN : MAG : GAN.$$

Nun aber ist $MABN = MABG + GABN$, so dafs folglich

$$[b] \quad MAN = MAG + GAN$$

stattfände.

Man lege in den drei Ebenen die Perpendikulären CM , CN , CG nach der Kante BA , so sind die Dreiecke ACM , ACN , ACG gleich, und geben $CM = CN = CG$; die Punkte M , N , G liegen also nicht in gerader Linie, daher die Schrägen AM , AN , AG nicht in derselben Ebene. Nun aber soll später gezeigt werden (47), dafs in diesem Falle der ebene Winkel MAN kleiner ist, als $MAG + GAN$; mithin ist die Gleichheit [b] unmöglich, folglich ändert sich der Winkel der Schrägen nicht in demselben Verhältnifs wie der Flächenwinkel.

★ Zusatz. Man sagt, ein Flächenwinkel sei ein rechter, ein spitzer oder stumpfer, je nachdem der Winkel der Perpendikulären selbst ein rechter, ein spitzer oder stum-

pfer ist. Nach diesen Erklärungen ist es ein Leichtes einzusehen, daß in jedem rechten Flächenwinkel die Seiten zu einander perpendikulär sind.

Eben so leicht ist es über die Flächenwinkel Sätze aufzustellen, welche in Bezug auf die ebenen Winkel Uebereinstimmendes darbieten. So z. B., wenn zwei Ebenen sich gegenseitig durchschneiden, so ist die Summe der Nebenwinkel zweien rechten gleich, und die Scheitelwinkel sind gleich. Die Begegnung zweier Parallelebenen mit einer dritten Ebene veranlaßt dieselbe Gleichheit der Winkel, wie die Begegnung zweier parallelen Geraden mit einer Secante, was im nächsten Satze hinreichend bewiesen werden soll.

43. **Lehrsatz XXXIV.** (Fig. 38). Sind zwei Parallelebenen MN und PQ von einer dritten Ebene RS durchschnitten, so sind die gleich gelegenen Flächenwinkel gleich.

Es soll gezeigt werden, daß der Flächenwinkel $MABR = PCDR$. Man führe eine zu AB perpendikuläre Ebene, welche die Ebene RS in der Linie AR und die Ebenen MN , PQ in den Parallelen AM , CP schneidet wird, so daß der Winkel $MAR = PCR$. Da die Ebene RAM perpendikulär zu AB ist, so sind die Geraden AM und AR auch perpendikulär zu AB , und der Winkel MAR mißt den Flächenwinkel $MABR$. CD ist aber zu AB parallel, die Ebene RAM auch perpendikulär zu CD und in Folge dessen mißt PCR den Flächenwinkel $PCDR$. Nun hat man $MAR = PCR$, folglich der Flächenwinkel $MABR = PCDR$.

Anmerkung (Fig. 39). Das Umgekehrte ist nicht wahr; denn zieht man in einer Ebene RS zwei Gerade AB , CD , die sich begegnen, und führt durch diese Geraden zwei Ebenen BM , DP gleichgeneigt nach derselben Seite R der Ebene RS , so ist es klar, daß diese Ebenen nicht parallel sind.

Aber wenn außer der Gleichheit der Flächenwinkel die Linien AB und CD als parallel angenommen wer-

den (38), dann sind die zwei Ebenen BM , DP parallel. Die zu den Linien AB und CD perpendikuläre Ebene RAM bestimmt durch ihre Durchschnitte mit den drei Ebenen die Winkel MAR und PCR , welche als gleich vorausgesetzt worden sind; CP ist also parallel zu AM . Aber CD ist bereits parallel zu AB , die Ebenen BM , DP sind folglich parallel (33).

44. **Lehrsatz XXXV.** (Fig. 40). Wenn eine Ebene BP einen Flächenwinkel in zwei gleiche Theile theilt, so ist jeder Punkt der Ebene BP gleichweit, und jeder Punkt außerhalb dieser Ebene ungleichweit von den Seiten BM und BN entfernt.

Von den in der Ebene BP gewählten Punkt C fälle man die Perpendikel CD , CE auf die Ebenen BM , BN und führe die Ebene DCE , welche die drei Ebenen in FC , FD , FE schneidet. Die Gerade AB ist perpendikulär zu diesen drei Linien (37, Zusatz I.); folglich messen die Winkel CFD , CFE die Flächenwinkel $PABM$, $PABN$. Vermöge der Voraussetzung sind diese Flächenwinkel gleich, demnach $CFD = CFE$. Daraus folgt die Gleichheit der rechtwinkligen Dreiecke CDF , CEF , und man hat nun $CD = CE$. Daher ist jeder Punkt der Ebene BP von den Seiten BM , BN gleichweit entfernt.

Es sei G ein Punkt außerhalb der Ebene BP ; fälle die Perpendikel GE , GH ; führe die Ebene EGH , welche die Durchschnitte EF , FH bestimmt; fälle von dem Punkt C , daselbst GE die Ebene BP durchschneidet, zur Ebene BM das Perpendikel CD , welches in die Ebene EGH zu liegen kommt; endlich verbinde man die Punkte D und G . Man hat $GD < GC + CD$, und weil der Punkt C in der Ebene BP liegt, $CH = CE$, folglich $GD < GE$. Nun aber ist GH perpendikulär zur Ebene ABM und GD schief; demnach ist $GE < GD$, um so mehr also $GH < GE$. Jeder Punkt außerhalb der Ebene BP ist daher von den Seiten BM und BN ungleichweit entfernt.

45. **Lehrsatz XXXVI.** (Fig. 41). Fällt man aus einem innerhalb eines Flächenwinkels gewählten Punkt O die Perpendikel OC , OD zu den zwei Seiten, so ist der Winkel COD dieser Perpendikulären das Supplement des Flächenwinkels.

Die Ebene COD ist perpendicular zur Kante AB (37, Zusatz I.) und sie bestimmt durch ihre Durchschnitte mit den zwei Seiten den Winkel CED , welcher den Winkel dieser Seiten misst. Da nun das Viereck $OCED$ rechtwinklig bei C und D ist, so ist folglich der Winkel COD das Supplement von CED .

46. **Lehrsatz XXXVII.** (Fig. 42). Wenn man aus einem Punkte O im Innern eines dreiseitigen Winkels S die Perpendikel OP , OQ , OR auf die Seiten ASB , ASC , BSC fällt, so bestimmen diese Perpendikel einen neuen dreiseitigen Winkel, dessen Seiten Supplemente der Flächenwinkel des Körperwinkels S , und dessen Flächenwinkel Supplemente der Seiten des nämlichen Körperwinkels sind.

Die Seiten des neuen dreiseitigen Winkels O sind die von den Perpendikeln OP , OQ , OR gebildeten ebenen Winkel POQ , POR , QOR ; demnach sind zuerst diese Seiten die Supplemente der an AS , SB , SC gebildeten Flächenwinkel (45).

Ferner nehmen wir wahr, dass die Ebene POQ perpendicular zu den Seiten ASB , ASC (35), und dass dem zu Folge die Kante SA perpendicular zu dieser Ebene ist (37, Zusatz I.). Eben so ist SB perpendicular zur Ebene POR , und SC zur Ebene QOR . Es sind folglich die Kanten des Körperwinkels S beziehentlich perpendicular zu den Seiten des Körperwinkels O , demnach die Seiten von S die Supplemente der Flächenwinkel von O , oder umgekehrt die Flächenwinkel von O die Supplemente der Seiten von S .

Anmerkung. Dieser Eigenschaften wegen, werden die dreiseitigen Winkel S und O supplementäre genannt. Auch wäre noch anzumerken, daß jedem Vielseitswinkel ein supplementärer Vielseitswinkel entspricht.

47. **Lehrsatz XXXVIII.** (Fig. 43). In einem dreiseitigen Winkel ist jeder ebene Winkel kleiner, als die Summe der beiden andern.

Damit der Beweis statt finde, so muß eine der Seiten größer sein, als jede der andern einzeln genommen. Es sei ASB diese Seite : mache darin den Winkel $ASD = ASC$, ziehe willkürlich zwischen den Kanten SA und SB die Gerade AB , welche SD in D schneidet; in der dritten Kante nehme man $SC = SD$, und ziehe endlich CA , CB .

Vermöge der Construction sind die Dreiecke ASD und ASC gleich, demnach $AD = AC$. Man hat aber $AD + DB < AC + CB$, folglich $DB < CB$. In den Dreiecken SBD , SBC ist daher SB gemeinschaftlich, $SD = SC$, $DB < CB$, und daraus schließt man, der Winkel $DSB < CSB$. Wird einer Seits ASD , anderer Seits ASC hinzugefügt, so ergiebt $ASD + DSB$ oder $ASB < ASC + CSB$.

48. **Lehrsatz XXXIX.** (Fig. 44). Die Summe der, einen Körperwinkel bildenden ebenen Winkel ist kleiner als vier rechte Winkel.

Nachdem eine Ebene geführt wurde, welche die Seiten des Körperwinkels S im Polygon $ABCDE$ schneidet, so nehme man einen Punkt O im Innern des Polygons, und verbinde ihn mit den verschiedenen Scheiteln $A, B, C, \dots$. Auf diese Weise entstehen in dem Polygon so viel Dreiecke, als sich im Scheitel S vereinigen, und folglich ist die Summe der Winkel der ersteren gleich der, der Winkel der letzteren. Diefs voraus geschickt, so giebt der vorangehende Lehrsatz

$$OAE + OAB < SAE + SAB$$

$$OBA + OBC < SBA + SBC$$

u. s. w.

Die Summe der in den Punkten A, B, C benachbarten Winkel der Dreiecke des Polygons ist mithin kleiner, als in den Seitendreiecken; demnach ist zur Ausgleichung die Summe der Winkel bei S kleiner, als jene der Winkel bei O . Da nun diese letztere Summe vier rechten Winkeln gleicht, so ist folglich die Summe der Winkel bei S kleiner als vier rechte.

49. **Lehrsatz XL.** (Fig. 45.) Mit drei ebenen Winkeln, welche den Bedingungen der zwei vorangehenden Lehrsätze genügen, kann man stets einen dreiseitigen Winkel bilden.

In einer und derselben Ebene mache man den Winkel ASB der grösseren Seite, und die Winkel ASM, BSN den beiden andern gleich, beschreibe aus dem Mittelpunkt S mit einem beliebigen Halbmesser einen, die Punkte A, B, M, N bestimmenden Kreis, nehme den Bogen $AM' = AM$, und den Bogen $BN' = BN$: da ASB die grössere Seite ist, so müssen die Punkte M' und N' zwischen A und B hineinfallen. Ferner hat man, wegen der Voraussetzung, $ASB < ASM + BSN$, daher auch, Bogen $AB < AM' + BN'$; folglich liegt der Punkt N' zwischen A und M' , folglich müssen sich die Sehnen MM', NN' in O innerhalb des Kreises schneiden. Aus dem Punkte O errichte man ein Perpendikel OC zur Ebene ASB , vollende mit einer, der halben Sehne GM gleichen Hypothenuse GC das recht winklige Dreieck GOC ; endlich verbinde man S und C , so ist der, durch die Kanten SA, SB, SC gebildete Körperwinkel der verlangte dreiseitige Winkel. Es kommt nur darauf an zu beweisen, dafs die Winkel ASC, BSC beziehentlich gleich sind denen ASM, BSN . Und wirklich, da OG perpendikulär zur Linie SA , und OC perpendikulär zur Ebene ASB ist, so ist der Winkel CGS ein rechter (19), und folglich sind die Dreiecke CGS, MGS gleich; folglich ist der Win-

kel $ASC = ASM$. Die Gleichheit der nämlichen Dreiecke giebt $SC = SM$; folglich ist $SC = SN$. Nun aber ist der Winkel CHS auch ein rechter (19); folglich sind die rechtwinkligen Dreiecke CHS , NHS gleich, weil sie einerlei Hypothenuse, und eine Seite gemeinschaftlich haben, folglich endlich der Winkel $BSC = BSN$.

Wird OC um seine eigene Gröfse bis C' auf der anderen Seite der Ebene ASB verlängert, und S mit C' verbunden, so kann man einen zweiten dreiseitigen Winkel bilden, welcher noch aus denselben ebenen Winkeln zusammengesetzt sein wird.

50. **Lehrsatz XLI.** (Fig. 46). Wenn zwei dreiseitige Winkel gleiche Seiten haben, dieselben einzeln genommen, so sind die von gleichen Seiten eingeschlossenen Flächenwinkel gleich.

Gesetzt, es sei $ASB = A'S'B'$, $ASC = A'S'C'$, $BSC = B'S'C'$. In den Ebenen ASC , BSC , errichte man von der Kante SC die Perpendikel DE , DF ; nehme $S'D' = SD$, und ziehe in den Ebenen $A'S'C'$, $B'S'C'$ von $S'C'$ die Perpendikel $D'E'$, $D'F'$. Die zwei an SC und $S'C'$ gebildeten Flächenwinkel werden durch die ebenen Winkel EDF , $E'D'F'$ gemessen; es soll nun gezeigt werden, daß $EDF = E'D'F'$ ist.

Nach den Voraussetzungen und den vorangegangenen Constructionen ergibt sich $SD = S'D'$, $SDE = S'D'E'$, $ASC = A'S'C'$; daher sind die Dreiecke DSE , $D'S'E'$ gleich. Auf dieselbe Art wird die Gleichheit der Dreiecke DSF und $D'S'F'$ dargethan; folglich hat man

$$DE = D'E', DF = D'F', SE = S'E', SF = S'F'.$$

Die Dreiecke ESF , $E'S'F'$ haben folglich einen gleichen Winkel, gelegen zwischen gleichen Seiten; folglich $EF = E'F'$. Es sind daher die Dreiecke DEF , $D'E'F'$ congruent; folglich ist der Winkel $EDF = E'D'F'$.

51. **Zweiter Beweis** (Fig. 47). Der vorige Beweis beruht auf der Annahme, daß die Perpendikel DE , DF den Kanten SA und SB begegnen, was nicht immer

der Fall ist. Folgender Beweis erleidet keine Ausnahme.

Man nehme $S'D' = SD$, und führe wie oben die Perpendikel $DE, DF, D'E', D'F'$. Ferner nehme man $SG > SD$; ziehe GH welche SA in H , und DE in K schneidet; ziehe GI welche SB in I und DF in L schneidet; ziehe $G'I'$, welche $S'B'$ in I' und $D'F'$ in L' schneidet, und verbinde die Punkte I, H und K, L . Man nehme noch die Entfernungen $S'G' = SG, S'H' = SH, S'I' = SI$, und vollende die durch die Figur angezeigte Construction.

Das Dreieck GHS ist gleich dem $G'H'S'$, GIS dem $G'I'S'$, HSI dem $H'S'I'$; und hieraus ergibt sich, daß die Dreiecke $GHI, G'H'I'$ congruent sind, folglich der Winkel $HGI = H'G'I'$. Die Gleichheit der ersten Dreiecke giebt auch den Winkel $HGS = H'G'S'$, und $IGS = I'G'S'$; dazu kommt vermöge der Construction $DG = D'G'$; folglich sind die rechtwinkligen Dreiecke $DGK, D'G'K'$ beziehentlich gleich denen $DGL, D'G'L'$. Daraus schließt man $GK = G'K', GL = G'L'$; folglich haben die Dreiecke $GKL, G'K'L'$ einen gleichen Winkel, eingeschlossen zwischen gleichen Seiten; folglich $KL = K'L'$. Aber aus der Gleichheit derselben rechtwinkligen Dreiecke ergibt sich noch $DL = D'K', DL = D'L'$; folglich sind die Dreiecke $DKL, D'K'L'$ gleich, folglich endlich der Winkel $KDL = K'D'L'$: das heißt, gleiche Seiten schließen gleiche Flächenwinkel ein.

52. Anmerkung. Der erste Beweis liefse sich noch beibehalten, indem man denselben auf folgende Weise ergänzt.

Nachdem es, wie in dem zweiten Beweis erkannt wurde, daß der Winkel $SGH = S'G'H'$, der Winkel $SGI = S'G'I'$, der Winkel $HGI = H'G'I'$ so wird man bemerken, daß die dreiseitigen Winkel G und G' je und je gleiche Seiten haben, und daß außerdem die Winkel $SGH, SGI, S'G'H', S'G'I'$ spitz sind; wendet man folglich den ersten Beweis auf die Körperwinkel G und G' an, so wird man schließen können, daß die Flächenwinkel

$HS GI$, $HS'G'I'$ gleich sind. Es sind aber gerade diejenigen, welche die Flächen ASC , $A'S'C'$ mit den Flächen BSC , $B'S'C'$ bilden.

53. **Lehrsatz XLII.** (Fig. 48). Zwei dreiseitige Winkel sind gleich, sobald ihre einzeln genommenen Seiten gleich und ähnlich vertheilt sind.

Es sei $ASB = A'S'B'$, $ASC = A'S'C'$, $BSC = B'S'C'$. Immer ist es möglich, den Körperwinkel S' dergestalt in den Körperwinkel S hineinzulegen, daß die Seite $A'S'B'$ mit ihres Gleichen zusammen fällt, und die Kante $S'C'$ auf dieselbe Seite wie SC zu stehen kommt, in Bezug auf diese Seitenfläche. Vermöge der Voraussetzung müssen die gleichen Seiten ähnlich vertheilt sein, eine Bedingung welche bedeutet, daß nach der eben angegebenen Uebereinanderlegung die Seiten $A'S'C'$, $B'S'C'$, die Kanten SA , SB , mit den Seiten ASC , BSC , die jenen beziehentlich gleich sind, gemeinschaftlich haben müssen. Dem vorigen Lehrsatz zu Folge sind die Neigungswinkel von $A'S'C'$ und $B'S'C'$ zu der Seite $A'S'B'$ gleich den Neigungswinkeln von ASC und BSC zu ASB ; folglich müssen die Ebenen $A'S'C'$, $B'S'C'$ mit ASC , beziehentlich zusammenfallen, folglich sind die dreiseitigen Winkel gleich.

54. **Anmerkung.** Sind die gleichen Seiten nicht ähnlich vertheilt, so geht bei der oben angedeuteten Uebereinanderlegung die Seite $A'S'C'$ nicht mehr durch die Kante SA , wohl aber durch SB , und zugleich $B'S'C'$ durch SA . Alsdann sind die Flächenwinkel zwischen den gleichen Seiten nicht minder gleich; aber diese Gleichheit zieht nicht mehr das Zusammenfallen der anderen Seiten nach sich, und folglich sind diese Körperwinkel ungleich.

Will man in diesem Falle dennoch $A'S'B'$ auf ASB legen, in der Art, daß die Kante SA den gleichen Seiten ASC , $A'S'C'$, und die Kante SB den Seiten BSC , $B'S'C'$, zugleich angehöre, so ist es klar, daß $S'C'$ eine

Lage SD (Fig. 49) auf der anderen Seite der Ebene ASB annehmen werde. Nun soll bewiesen werden, daß die Linien SC , SD in einer zur gemeinschaftlichen Seite ASB perpendicularen Ebene liegen, und daß dieselben in Bezug auf diese Seite gleiche Neigungen haben.

Man nehme $SD = SC$, ziehe CD , welche die Ebene ASB in O schneidet, und hierauf SO d. i. den Durchschnitt der Ebenen ASB , CSD . In der Ebene ASB ziehe man willkürlich durch den Punkt O die Gerade AOB , und lasse dieselbe die Kanten SA , SB schneiden; alsdann vollende man die Constructionen, der Figur gemäß. Die Dreiecke ACS , ADS sind gleich, und geben $AC = AD$. Eben so geben die gleichen Dreiecke BCS , BDS , $BC = BD$; folglich ist AB perpendicular in der Mitte von CD . Der Punkt O ist folglich der Mittelpunkt von CD ; und weil man $SC = SD$ genommen, so folgt, daß SO perpendicular zu CD ist. Die Linie CD ist folglich zugleich perpendicular zu AB und zu SO , und darum die Ebene CSD perpendicular zur Ebene ASB (35). Ferner zeigen die gleichen Dreiecke COS , DOS , daß die Linien SC und SD gleich geneigt sind, in Bezug auf diese Ebene.

Sind zwei dreiseitige Winkel von der Beschaffenheit wie die vorigen, d. h. haben sie gleiche Seiten mit gleichen Neigungen, aber können sie nicht zum Uebereinanderliegen gebracht werden, weil die gleichen Seiten nicht ähnlich vertheilt sind, so nennt man sie symmetrische.

55. Damit Nichts in Bezug auf die Vielseitswinkel zu wünschen übrig blieb, so wäre zu erklären, wie ihr Maß auf dasjenige der Flächenwinkel zurückzuführen sei; es kann jedoch in Betreff dieses Punktes auf die gewöhnlichen Lehrbücher der Geometrie verwiesen werden.

Zu beweisende Lehrsätze.

56. Schliesslich mögen, doch nur als eine Uebung, verschiedene Lehrsätze aufgestellt werden, deren Beweise sich leicht aus dem Vorangehenden ableiten lassen.

I. Wenn man durch einen Punkt einer Geraden A mehre gleiche Gerade zieht, welche mit A gleiche Winkel bilden, so sind die Endpunkte dieser Geraden in dem Umfange eines Kreises gelegen, dessen Ebene perpendicular zu dieser Geraden A ist, und dessen Mittelpunkt in diese Gerade hineinfällt.

II. Wenn eine Gerade gleiche Winkel mit drei Geraden einschließt, welche durch ihren Fußpunkt in einer Ebene gehen, so sind diese Winkel rechte, und die Gerade ist perpendicular zur Ebene.

III. Alle Parallelen zu einer Geraden, geführt durch verschiedene Punkte einer und derselben Geraden, liegen in einer und derselben Ebene.

IV. Zieht man durch verschiedene Punkte einer, in einer Ebene gelegenen Geraden, auf der nämlichen Seite dieser Ebene parallele und gleiche Gerade, so liegen die Endpunkte dieser Parallelen, in einer zur Ebene parallelen Geraden.

V. Wenn eine Gerade perpendicular zu einer Ebene ist, so ist jede zu dieser Geraden parallele Ebene, perpendicular zu der nämlichen Ebene.

VI. Sind zwei Ebenen perpendicular unter sich, so ist jede zu einer derselben perpendicularen Gerade parallel zur andern, oder gänzlich in dieser gelegen.

Und umgekehrt, ist eine Gerade parallel zu einer Ebene, so ist jede perpendicularen Ebene zu dieser Geraden, auch perpendicular zu jener Ebene.

VII. Wenn eine Ebene parallel zu zwei sich schneidenden Geraden ist, so ist sie parallel zur Ebene dieser Geraden.

VIII. Sobald drei, nicht in der nämlichen Ebene liegende Gerade, gleich und parallel sind, so sind die an beiden Seiten, durch Vereinigung ihrer Endpunkte gebildeten Dreiecke gleich, und deren Ebenen parallel.

IX. Werden durch verschiedene Punkte einer Ebene, nach derselben Seite dieser Ebene, gerade und gleiche Parallelen gezogen, so liegen die Endpunkte derselben in einer zu jener Ebene parallelen Ebene.

X. Wenn eine Gerade parallel zu einer Ebene ist, so ist jede, zu jener parallele Gerade auch parallel zu der nämlichen Ebene, oder in dieser selbst gelegen.

XI. Sind zwei Gerade A und B parallel, so sind zwei, beziehentlich zu A und B parallele, Gerade A' und B' parallel unter sich.

XII. Sind zwei Ebenen P und Q parallel, so sind zwei, beziehentlich zu P und Q parallele Ebenen P' und Q' , parallel unter sich.

XIII. Wenn zwei Ebenen P und Q beziehentlich parallel zu zwei sich schneidenden Ebenen P' und Q' sind, so ist der Durchschnitt der zwei ersten parallel zu dem der zwei letzten.

XIV. Sind zwei Ebenen parallel, dann ist eine, zu einer derselben parallele Gerade auch parallel zur andern, oder in dieser gänzlich enthalten.

XV. Schneiden sich zwei Gerade, so schneiden sich die beziehentlich zu diesen Geraden perpendikulären Ebenen auch.

XVI. Schneidet eine Gerade eine Ebene, so schneiden sich eine perpendikuläre Gerade zu dieser Ebene, und eine perpendikuläre Ebene zu dieser Geraden auch.

XVII. Die in den Mittelpunkten der Seiten eines Dreieckes zu denselben perpendikulären Ebenen, schneiden sich in der nämlichen Geraden.

XVIII. Sind vier, nicht in einer Ebene liegende Punkte gegeben, und führt man durch die Mittelpunkte der Geraden, welche je zwei und zwei dieser Punkte verbinden, perpendikuläre Ebenen, so gehen alle diese Ebenen durch einen einzigen Punkt hindurch.

XIX. Zwei, eine Ebene schneidende parallele Gerade, sind zu dieser Ebene gleich geneigt.

XX. Zwei, eine Gerade schneidende parallele Ebenen, bilden mit derselben gleiche Winkel.

XXI. Zwei Flächenwinkel sind gleich, sobald ihre Seitenflächen parallel und nach der Seite gerichtet sind.

XXII. Die drei Ebenen, welche die Flächenwinkel eines dreiseitigen Körperwinkels halbiren, schneiden sich in einer und derselben Geraden.

XXIII. Hat man zwei, nicht in der nämlichen Ebene enthaltene Gerade so getheilt, daß die zwei Abschnitte der einen proportional zu den Abschnitten der anderen sind, so kann man stets drei parallele Ebenen durch dieselben führen, deren eine durch die beiden oberen Endpunkte, die andere durch die beiden unteren, die dritte durch die zwei Theilungspunkte hindurchgeht.

XXIV. Giebt man drei Gerade, welche nicht zu einer Ebene parallel, und so gelegen sind, daß zwei derselben, wie immer genommen, niemals in der nämlichen Ebene liegen, so kann man stets ein Parallelepipeton darstellen, bei welchem drei Kanten wie diese Geraden gerichtet sind.

Descriptive Geometrie.

Erste Abtheilung.

Die gerade Linie und die Ebene.

Grundbegriffe.

1. **D**ie descriptive Geometrie hat die Darlegung der Methoden zu ihrem besonder'n Gegenstand, wodurch die Auflösungen solcher Aufgaben, welche die drei Dimensionen des Raumes betreffen, auf Constructionen in einer Ebene zurückgeführt werden können.

Ein einzelnes Beispiel wird hinreichen, die Wichtigkeit dieses Theils der Mathematik zu zeigen. Angenommen, es werde der Mittelpunkt einer, um eine dreiseitige Pyramide beschriebenen Kugel verlangt. Man sieht leicht ein, daß sich die in den Mittelpunkt der Kante beziehentlich zu denselben, perpendicularen Ebenen im Mittelpunkte dieser Kugel schneiden; aber wie diese Construction bewerkstelligen; wie diese Ebenen erhalten? Und wie deren Durchschnitte finden?

Hier erkennt man die Nothwendigkeit Verfahrensarten festzusetzen, durch welche man alles Gegebene einer Aufgabe in einer Ebene genau darstellen, und hierauf ohne diese Ebene zu verlassen Constructionen vollziehen kann, welche zu Resultaten führen, vermittelt deren es nur noch einfache und leichte Operationen auszu-

führen giebt, um hieraus die wirklichen Bestimmungen dem Sinne der Aufgabe gemäß abzuleiten.

2. Alle diese Bedingungen erfüllenden Methoden, sind Gegenstände der descriptiven Geometrie; aber die Methode der Projectionen ist die einfachste unter allen, und zugleich die fruchtbarste; sie dient allen andern als Fundament, und sie ist es, welche wir in dieser Abhandlung zu entwickeln gedenken. Im Allgemeinen kann man sagen, daß sie darin besteht, zwei feste sich schneidende Ebenen zu nehmen, auf dieselben alle Punkte des Raumes zu beziehen, durch Perpendikel, welche von diesen Punkten aus auf die zwei Ebenen gefällt werden, und alsdann eine dieser Ebenen um ihren Durchschnitt mit der anderen zu drehen, bis zum Zusammenfallen mit dieser. Gehen wir nun zu dem Einzelnen über.

3. Unter der Projection eines Punktes in einer Ebene versteht man den Fußpunkt des, aus diesem Punkt auf die Ebene gefällten Perpendikels.

Es ist also begreiflich, daß, wenn man von dem Punkt P (Taf. II, Fig. 1) ein Perpendikel Pp zur Ebene MN zieht, der Fußpunkt p dieser Perpendikuläre die Projection des Punktes P in der Ebene MN ist. Die Ebene MN heißt alsdann die Projectionsebene. Es leuchtet ein, daß der Punkt p zugleich die Projection aller Punkte der Geraden Pp ist.

4. Die Projection einer Linie in einer Ebene ist die, durch die Projectionen aller Punkte dieser Linie, gebildete Linie.

Werden aus verschiedenen Punkten der Curve AB (Fig. 1) Perpendikel auf die Ebene MN gefällt, so ist die, durch die Fußpunkte dieser Perpendikel gebildete Linie ab die Projection der Curve AB . Diese Perpendikel sind parallel unter sich, ihr Inbegriff bildet eine Oberfläche, welche zur Classe derjenigen gehört, die man cylindrische nennt; und deswegen bezeichnet man dieselbe oft durch die Benennung des projecirenden Cylinders.

Da die Projection ab als Durchschnitt dieses Cylinders mit der Ebene MN erscheint, so ist es klar, daß alle auf dem Cylinder gezogene Curven ab zur Projection haben.

5. Ist die Curve AB eine ebene, und ihre Ebene perpendicular zur Projectionsebene (Fig. 2), so ist der projecirende Cylinder nichts Anderes, als die Ebene der Curve selbst; denn die, die Projectionen der Punkte dieser Curve, bestimmenden Perpendikel sind alle in dieser Ebene enthalten (Einleit. 36). Alsdann reducirt sich die Projection dieser Curve auf eine Gerade ab .

Liegt die Curve in einer zur Projectionsebene parallelen Ebene, so ist klar, daß sie eine, ihr völlig gleiche Curve zur Projection hat.

6. Sobald die zu projecirnde Linie eine Gerade AB (Fig. 3) ist, so liegen die, aus verschiedenen Punkten derselben auf die Projectionsebene MN gefällten Perpendikel in einer einzigen Ebene, und folglich ist ihre Projection eine Gerade. Nun aber bestimmen zwei Punkte eine Gerade; um daher eine Gerade AB auf die Ebene MN zu projeciren, reicht es hin, die Projectionen a und b zweier ihrer Punkte zu bestimmen, und eine Gerade durch diese zwei Projectionen zu ziehen.

Auch ist zu bemerken, daß um die projecirende Ebene der Geraden AB zu haben, es genügt, aus einem ihrer Punkte, ein Perpendikel Aa zur Ebene MN , und durch die zwei Geraden AB und Aa eine Ebene zu führen.

Wäre die Gerade AB perpendicular zur Ebene MN , so würde deren Projection auf einen einzigen Punkt sich beschränken, und diese dort gelegen sein, wo solche der Ebene MN begegnet.

7. Ein Punkt ist vollständig bestimmt, wenn man dessen Projectionen auf zwei, sich schneidende Ebenen kennt. In der That, es findet sich dieser Punkt in den, zu diesen Ebenen aus den zwei gegebenen Projectionen errichteten Perpendikeln; und

diese Projectionen können sich nicht in mehr als einem Punkte schneiden.

Irrig würde es aber sein zu glauben, daß zwei, in zwei sich schneidenden Ebenen beliebig genommene Punkte stets die Projectionen des nämlichen Punktes im Raume sind. Damit dies der Fall sei, müssen die Punkte eine, sogleich anzuführende Bedingung erfüllen.

8. Damit zwei, beziehentlich in zwei sich schneidenden Ebenen liegende Punkte, die Projectionen des nämlichen Punktes im Raume sind, so müssen, und diese Bedingung ist hinreichend, die aus diesen zwei Punkten auf den Durchschnitt beider Ebenen gezogenen Perpendikel in einem einzigen Punkte desselben zusammen kommen.

xyz , xyu (Fig. 4) mögen zwei, sich in xy schneidende Ebenen sein. Aus einem willkürlichen Punkte A im Raume fälle man auf diese Ebenen, die Perpendikel Aa , Aa' ; führe hierauf durch diese Linien die Ebene $Aapa'$, welche die Linie xy im Punkte p , und die zwei Ebenen in den Geraden ap , $a'p$ schneidet. Nach den bekannten Lehrsätzen (Einleit. 35, 37) ist die Linie xy perpendicular zur Ebene $Aapa'$ und folglich zu den Geraden ap , $a'p$, welche durch ihren Fußpunkt in dieser Ebene gehen; folglich kommen die, zu xy aus den Projectionen a und a' des Punktes A gefällten Perpendikel in demselben Punkte zusammen.

Noch ist zu zeigen, daß diese Bedingung hinreicht, d. h. daß zwei Punkte a und a' , welche ihr entsprechen, die Projectionen des nämlichen Punktes im Raume sind. Und wirklich, da die Linie xy perpendicular zu den Geraden ap , $a'p$ ist, so muß sie es auch zur Ebene apa' sein, und folglich sind die Ebenen xyz , xyu perpendicular zur letzteren, oder es ist umgekehrt die Ebene apa' perpendicular zu den Ebenen xyz , xyu ; errichtet man nun aus den Punkten a und a' Perpendikel zu den Ebenen xyz , xyu , so, liegen folglich diese Perpendikel in der Ebene apa' (Einleit. 36). Jetzt ist es klar, daß diese sich in einem

Punkte A schneiden, dessen Projectionen a und a' sind.

9. Eine Gerade ist bestimmt, wenn man ihre Projectionen auf zwei, sich schneidende Ebenen kennt. Denn, errichtet man durch jede Projection eine perpendikuläre Ebene zur Ebene dieser Projection, so hat man dann zwei, die Gerade enthaltende Ebenen (6), deren Durchschnitt die Gerade bestimmt.

Sind z. B. ab und $a'b'$ (Fig. 5) die Projectionen einer Geraden, so denke man sich durch ab eine perpendikuläre Ebene zur Ebene xyz , und durch $a'b'$ eine perpendikuläre Ebene zu xyu . Alsdann ist der Durchschnitt AB dieser zwei Ebenen bestimmt, und die Gerade welche ab , $a'b'$ zu ihren Projectionen hat.

Wenn die Geraden ab , $a'b'$ perpendikulär zu xy (Fig. 6) sind, und diese Linie in zwei verschiedenen Punkten m und n schneiden, so können sie nicht die Projectionen der nämlichen Geraden sein. Um dies darzuthun, genügt es zu zeigen, daß die, durch die Linie am perpendikulär zur Ebene xyz geführte Ebene amp , parallel zu der, durch $a'n$ perpendikulär zu xyu gelegten Ebene $a'nq$ ist. In der That, weil die Ebenen amp und xyz perpendikulär unter sich sind, und weil mx perpendikulär zu am , so folgt, daß die Linie xy perpendikulär zur Ebene amp ist (Einleit. 35). Aus einem ähnlichen Grund ist die Linie xy perpendikulär zur Ebene $a'nq$; demnach sind die zwei Ebenen amp , $a'nq$ perpendikulär zur Geraden xy , und folglich parallel unter sich (Einleit. 28).

Sind aber die Projectionen ab , $a'b'$ perpendikulär zu xy , und begegnen dieser Linie in dem nämlichen Punkte m (Fig. 7), alsdann ist die Ebene ama' dieser Geraden den zwei Ebenen xyz , xyu zugleich perpendikulär; daraus geht hervor, daß alle in dieser Ebene gelegenen Geraden, ab und $a'b'$ zu Projectionen haben. Damit in diesem Falle die Bestimmung der Geraden stattfinden könne, muß deren Projection $a''b''$ auf eine neue, nicht durch die Linie xy gehende Ebene sxt gegeben sein.

10. Ueberhaupt bestimmen die Projectionen irgend einer Curve, auf zwei sich schneidende Ebenen, diese Curve selbst. Denn, sind abc und $a'b'c'$ (Fig. 8) die Projectionen der Curve ABC auf den Ebenen xyz und xyu , so errichte man Perpendikel zu jeder dieser Ebenen, aus verschiedenen Punkten dieser zwei Projectionen; sie bilden zwei die Curve ABC enthaltende cylindrische Oberflächen, welche folglich durch ihren Durchschnitt diese Curve bestimmen.

Schneiden sich die cylindrischen Oberflächen nicht, so gehören die gegebenen Projectionen nicht zu der nämlichen Linie.

Ist die Curve ABC und ihre Ebene perpendikulär zu xy , so sind die zwei projicirenden Cylinder nichts Anders, als diese Ebene selbst, und die Curve ABC ist nicht mehr bestimmt. Diese Unbestimmtheit ist analog jener, welche in Betreff einer geraden Linie am Schluss der vorangehenden Nummer erwähnt wurde, und man hilft ihr auf dieselbe Art ab.

11. Eine Ebene ist bestimmt, sobald man ihre Tracen auf zwei feste sich schneidende Ebenen kennt, d. h. die Geraden, in welchen sie den zwei Ebenen begegnet.

Dieser Satz ist schon als bekannt anzusehen, und auf jenen zurückzuführen, dass zwei sich schneidende Gerade eine Ebene bestimmen.

Um die Lage einer Ebene zu bestimmen, könnte man auch die Projectionen dreier Punkte derselben auf zwei feste Ebenen anwenden; inzwischen sind ihre Tracen für den Gebrauch weit bequemer. Ueberhaupt, begegnet eine Ebene der Durchschnittslinie zweier festen Ebenen, so ist es klar, dass dieser Begegnungspunkt α (Fig. 9) den zwei Tracen $\alpha\alpha$, $\alpha'\alpha$ zugleich angehört.

Ist die Ebene parallel zu xy (Fig. 10), so sind ihre Tracen auch parallel zu xy (Einleit. 26); und ist sie perpendikulär zu xy , so sind dieselben perpendikulär zu xy .

Ist sie parallel zu einer der zwei Ebenen, so ist ihre

Trace auf der andern Ebene parallel zu xy , und alsdann genügt diese Trace zu ihrer Bestimmung.

Geht endlich diese Ebene durch die Linie xy , so fallen ihre zwei Tracen mit dieser Linie zusammen, welche zu deren Bestimmung nicht hinreicht; man muß dann ihre Trace bx auf eine neue Ebene sxt (Fig. 11) geben.

12. In Betreff der krummen Oberflächen verweisen wir auf die zweite Abtheilung dieses Buches. Das Vorangehende genügt schon um zu zeigen, wie die gegebenen Stücke aller dieser Aufgaben, darin die drei Dimensionen des Raumes zum Grund gelegt werden, genau durch Punkte und Linien dargestellt werden können, welche in zwei sich unter angenommener Neigung schneidenden festen Ebenen liegen.

Um endlich alle diese Constructionen in einem einzigen Risse vereinigen zu können, so läßt man eine dieser zwei Ebenen, z. B. xyu (Fig. 12), um ihren Durchschnitt xy mit der andern Ebene xyz drehen, bis sie mit letzterer in xyu' zusammenfällt. Auf diese Weise bleiben die in der Ebene xyz gezogenen Linien unverändert; um aber genau die Lage der in der andern Ebene gelegen anzugeben, muß man sie, in Gedanken in ihre wahre Lage zurückführen. Was die außerhalb dieser Ebenen gelegenen Punkte betrifft, so können sie nicht in den Figuren erscheinen.

13. Nach dieser Umlegung stehen die Projectionen des nämlichen Punktes in einer bemerkenswerthen Beziehung zu einander. Sind (Fig. 12) a und a' diese Projectionen vor der Umlegung, so weiß man (8), daß die aus denselben auf die Linie xy gezogenen Perpendikel in demselben Punkte p zusammen kommen. Nun aber hört, während der Drehung der Ebene xyu um xy , die Gerade pa' nicht auf perpendikulär zu xy zu sein; folglich wird, wenn die Ebene xyu nach xyu' , in die Ebene xyz gelangt, die Linie pa' die Verlängerung pa'' von pa sein.

Daraus ergibt sich der beinahe fortwährend anzuwendende Satz: die Projectionen eines Punktes auf zwei Ebenen liegen in einem Perpendikel zum Durchschnitte derselben.

14. Bis jetzt war es nicht nöthig, irgend eine Voraussetzung, die Neigung der zwei Projectionsebenen betreffend, zu machen. Um aber die Constructionen möglichst einfach wiederzugeben, nimmt man in der Folge diese Ebenen perpendikulär unter sich. Herkömmlich ist es hierbei, eine derselben als horizontal, obschon sie irgend eine Lage haben kann, und die andere als vertical zu betrachten. Ihr Durchschnitt heisst die *Projectionensaxe* (*ligne de terre*).

Je nachdem eine Gerade parallel zur horizontalen Projectionsebene, oder perpendikulär ist, sagt man sie sei horizontal oder vertical. In derselben Bedeutung hat man horizontale und verticale Ebenen. Man mufs, um sich nicht zu täuschen, beim Gebrauch dieser Benennungen, grofse Sorgfalt beobachten. Denn, wenn eine Gerade parallel zur verticalen Ebene ist, so folgt daraus noch keineswegs, dafs sie vertical sei; mindestens nicht, dafs sie zugleich perpendikulär zur horizontalen Ebene sein müsse.

Jede Projection, jede Trace einer Ebene, erhält ihre Benennung nach der Ebene darin sie liegt. So sind z. B. die in der verticalen Ebene gelegenen Projectionen und Tracen, verticale Projectionen und Tracen.

15. Daraus, dafs die Projectionsebenen perpendikulär unter sich sind, gehen mehrere Folgerungen hervor.

1) Liegt ein Punkt oder eine Linie in einer der zwei Ebenen, so ist deren Projection in der *Projectionensaxe* enthalten. Denn die Perpendikel, welche die Projection bestimmen, liegen gänzlich in der ersten Ebene (Einleit. 36).

2) Befindet sich eine Linie in einer parallelen Ebene zu einer der zwei Ebenen, so ist ihre Projection auf der anderen Ebene, eine zur *Projectionensaxe* parallele Gerade. Liegt

zu. B. eine Linie in einer horizontalen Ebene, so sind die ihre verticale Projection bestimmenden Perpendikel in dieser horizontalen Ebene enthalten; folglich ist die verticale Projection der Durchschnitt dieser Ebene mit der verticalen Projectionsebene, und dieser eine Parallele zur Projectiionsaxe (Einleit. 29).

3) Ist eine Ebene perpendikulär zu einer der Projectionsebenen, so ist ihre Trace auf der anderen Ebene perpendikulär zur Projectiionsaxe. Eine verticale Ebene z. B. hat zur verticalen Trace ein Perpendikel zur Projectiionsaxe (Einleit. 37).

4) Die aus den Projectionen eines Punktes zur Projectiionsaxe gezogenen Perpendikel sind den Entfernungen dieses Punktes von den Projectionsebenen gleich. Denn, es sei A (Fig. 13) ein Punkt, dessen Projectionen a und a' sind; aus der Rechtwinklichkeit der Projectionsebenen ist es leicht zu folgern, dafs die Durchschnitte der Ebene aAa' mit jenen Ebenen einen Rechteck $Aapa'$ bestimmen, woraus man folglich $Aa = a'p$ und $Aa' = ap$ hat.

Wenn die verticale Ebene auf die horizontale Ebene umgelegt*) ist, so ergab sich schon (13), dafs die, durch die Projectionen a und a'' des nämlichen Punktes A gezogene Gerade apa'' perpendikulär zur Projectiionsaxe xy sein mußte. Aber hier ersieht man ferner, dafs der Theil $a''p$ augenblicklich die Erhöhung dieses Punktes über die Horizontalebene angiebt, und ap seine Entfernung von der verticalen Ebene ist.

16. Bis jetzt ist nur von einer Art der Projectionen die Rede gewesen; nämlich von denjenigen, welche sich durch das Fällen der Perpendikel auf eine Ebene (3) ergeben, und die man aus diesem Grunde orthogonale nennt. Sie sind zwar diejenigen, deren Gebrauch der bequemste und ausgedehnteste ist; aber es giebt noch an-

*) Man kann auch sagen umgeklappt.

dere. So z. B., wenn man unter sich parallele Gerade schief zu einer Ebene nimmt, so würde man schiefe Projectionen erhalten; und liesse man alle Geraden aus einem einzigen Punkt ausgehen, so erhielte man perspectivische Projectionen.

Ueberhaupt kann man sich irgend ein Gesetz denken, um auf eine gegebene Fläche Punkte zu bestimmen, welche verschiedenen Punkten im Raume entsprechen; die so bestimmten Punkte werden noch unter der Benennung Projectionen begriffen. Man darf aber nicht vergessen, die Projectionsart anzugeben, welche man anwenden will; sonst ist es immer zu verstehen, dass man sich der Orthogonalprojection bedient. In dieser kurzen Abhandlung wird keine andere in Betracht kommen.

17. Nun gedenken wir die Lösungen der wichtigsten Aufgaben darzulegen, welche man über die gerade Linie und die Ebene aufstellen kann. Die Zeichnung, welche alle Constructionen zu einer Aufgabe enthält, wird gewöhnlich Riss genannt. Die gegebenen Stücke und die Resultate werden immer durch volle Linien dargestellt; und die Constructionslinien durch punktirte Linien, die man nach den Umständen vermännigfaltigen wird.

Damit man leichter den Erklärungen folgt, werden wir auch eine gewisse Einförmigkeit in der Bezeichnung gebrauchen. Die grossen Buchstaben $A, B, C \dots$ werden Punkte im Raume bezeichnen und selten im Riss erscheinen. Die kleinen $a, b, c \dots$ ohne Beistriche geschrieben, werden der Horizontalebene, und die bestrichenen wie $a', b', c' \dots$ der Verticalebene zukommen. Die Projectionsaxe wird immer durch xy bezeichnet werden; die griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ werden meistens, auf dieser Linie liegende Punkte angeben.

Auch wenden wir die verschiedenen herkömmlichen Abkürzungen an. Der Punkt $[a, a']$ ist derjenige, welcher a und a' zu seinen Projectionen hat; die Linie $[ab, a'b']$ diejenige, deren Projectionen b und $a'b'$ sind; die Ebene $a\alpha a'$ diejenige, deren Tracen $a\alpha$ und $\alpha a'$ sind.

Spricht man endlich von einem gegebenen Punkte, einer gegebenen Linie oder Ebene, so ist darunter zu verstehen, daß die Projectionen des Punktes, der Linie oder die Tracen der Ebene bekannt sind. Soll eben so ein Punkt, eine Gerade oder eine Ebene bestimmt werden, so sind die Projectionen des Punktes, und der Geraden oder die Tracen der Ebene anzugeben.

Aufgaben. Durchschnitte der Geraden und Ebenen.

18. Aufgabe I. Aus den Projectionen einer Geraden, deren Tracen, d. h. die Punkte zu finden, wo die Gerade die Projectionsebenen schneidet.

Die Gerade im Raume ist der Durchschnitt ihrer projectirenden Ebenen (9). Nun aber ist der Durchschnittspunkt der horizontalen Tracen dieser zwei Ebenen offenbar den zwei Ebenen gemeinschaftlich; folglich ist er einer der Punkte der Geraden, und da derselbe in der Horizontalebene liegt, so ist er die horizontale Trace dieser Geraden. Aus einem ähnlichen Grunde ist der Durchschnittspunkt der verticalen Tracen der zwei projectirenden Ebenen die verticale Trace der Geraden.

Es seien ab und $a'b'$ (Aufg. der ersten Abth. Fig. I — 1) die zwei gegebenen Projectionen, welche die Projectionsebene xy in a und b' schneiden. Die Verticalebene durch ab ist eine projectirende Ebene der Geraden (6), ihre horizontale Trace ist ab , und ihre verticale Trace eine Gerade wie av , perpendicular zu xy (15. 3). Die andere projectirende Ebene hat zur verticalen Trace die Gerade $a'b'$, und zur horizontalen Trace die zu xy perpendicularäre Gerade xy . Der Punkt h wo sich die horizontalen, und der Punkt a daselbst sich die verticalen Tracen schneiden, sind folglich Punkte der Geraden im Raume; und weil sie in den Projectionsebenen liegen, so sind sie selbst die Tracen der Geraden.

Das Vorgehende läßt sich kurz in folgende allgemeine Regeln zusammenfassen. Um die horizontale Trace

einer Geraden zu bestimmen, verlängere man ihre verticale Projection bis zur Projectiionsaxe, und ziehe durch den Durchschnittspunkt, in der Horizontalebene ein Perpendikel zur Projectiionsaxe; so schneidet dasselbe die horizontale Projection der Geraden im gesuchten Punkte. Eben so verlängere man, um die verticale Trace einer Geraden zu erhalten, deren Horizontalprojection bis zur Projectiionsaxe, und errichte aus dem Durchschnittspunkte in der Verticalebene ein Perpendikel zur Projectiionsaxe, dann schneidet dasselbe die Verticalprojection der Geraden im geforderten Punkte.

Bemerkungen. Durch Veränderung der Projectionen ab und $a'b'$, können die Tracen h und v unzählig verschiedene Lagen annehmen. Hier merken wir nur vier vornehmliche Fälle an.

In der Figur I — 1, liegt die horizontale Trace h vor, und die verticale Trace v oberhalb der Projectiionsaxe.

In der Figur I — 2, ist die horizontale Trace h noch vor der Projectiionsaxe, aber die verticale Trace v in dem untern Theile der Verticalebene gelegen.

In der Figur I — 3, ist dies entgegengesetzt; hier liegt die horizontale Trace h hinter, und die verticale Trace v oberhalb der Projectiionsaxe.

Endlich stellt Fig. I — 4, den Fall dar, bei welchem die horizontale Trace h im hinteren Theil der Horizontalebene, und die verticale Trace v im unteren Theil der Verticalebene gelegen ist.

19. Aufgabe II. Aus den Tracen zweier Ebenen, die Projectionen ihres Durchschnittes zu finden.

Sei m (Fig. II — 1) der Durchschnitt der horizontalen Tracen, und n' derjenige der verticalen. Diese Punkte sind den zwei Ebenen gemein, und die sie verbindende Gerade im Raume ist offenbar der Durchschnitt dieser Ebenen. Der in der Horizontalebene liegende Punkt m , ist seine eigene Horizontalprojection, und wenn mm' perpendikulär zu xy gefällt wird, so ist m' dessen Vertical-

projection. Eben so ist der Punkt n' seine eigene Verticalprojection, und seine Horizontalprojection n ergibt sich durch das Ziehen des Perpendikels $n'n$ zu xy . Folglich darf man nur die Geraden mn und $m'n'$ ziehen, um die gesuchten Projectionen des Durchschnitts zu haben.

Besondere Fälle. 1) Hat eine der gegebenen Ebenen eine ihrer Tracen perpendikulär zur Projectiionsaxe, die horizontale Trace z. B., so ist diese Ebene perpendikulär zur Verticalebene, und folglich ihre verticale Trace, die Verticalprojection ihres Durchschnitts mit der anderen gegebenen Ebene. Sonst ist die Construction die nämliche.

2) Nehmen wir an, dafs in einer Projectionsebene die Tracen der zwei gegebenen Ebenen parallel unter sich sind, z. B. die horizontalen Tracen (Fig. II — 2). Der Durchschnitt der zwei Ebenen ist parallel zu jenen Tracen (Einleit. 23); folglich ist die Horizontalprojection mn dieses Durchschnitts auch zu denselben parallel (Einleit. 26), und ihre Verticalprojection $m'n'$ parallel zur Projectiionsaxe. Dieser Fall unterliegt keiner Schwierigkeit.

3) Betrachten wir den Fall wobei die zwei gegebenen Ebenen die Projectiionsaxe xy in demselben Punkte schneiden. Solche sind die Ebenen apa' und bpb' (Fig. II — 3). Da alsdann das allgemeine Verfahren unzureichend ist, so kann man diese Ebene durch irgend eine Ebene schneiden, und wie oben, die Projectionen der zwei Geraden des Durchschnitts suchen. Die Durchschnittspunkte dieser Projectionen sind die Projectionen eines, beiden gegebenen Ebenen gemeinschaftlichen Punktes; und da der Punkt p in welchem diese Ebenen die Projectiionsaxe schneiden denselben auch gemeinschaftlich ist, so folgt hieraus, dafs die Projectionen ihres Durchschnittes vollkommen bestimmt sind.

Fast immer nimmt man die Hülfs Ebene perpendikulär zur Projectiionsaxe; diese betrachtet man als eine neue Projectionsebene, sucht in Bezug auf dieselbe die Tracen der gegebenen Ebenen, und führt auf diese Weise

die Construction auf jene des allgemeinen Falles zurück. Es ist dies jene Auflösung, welche in der Figur entwickelt erscheint.

Die Tracen der Hülfebene sind durch die, zu xy perpendicularen Geraden $\beta\alpha$, $\beta\alpha'$ dargestellt; sie schneiden die Tracen der Ebene apa' in a und a' ; und wenn man für einen Augenblick die verticale Projectionsebene wie ursprünglich, perpendicular zur Horizontalebene gemacht hat, so wird die a und a' verbindende Gerade, die auf die Hülfebene bezogene Trace der Ebene apa' sein. Wird diese letztere Ebene um $\beta\alpha$ drehend bewegt, bis zum Zusammenfallen mit der Horizontalebene, so ändert der Punkt a seinen Ort nicht, die Linie $\beta\alpha'$ kommt nach βy , und der Punkt a' gelangt in die Entfernung $\beta\alpha'' = \beta\alpha'$; folglich wird hierdurch die Gerade, welche im Raume a und a' verbindet nach aa'' umgelegt.

Eben so findet man auf der Hülfebene die Trace bb'' der anderen gegebenen Ebene; der Punkt d daselbst sie aa'' schneidet, ist beiden Ebenen gemein, und man hat jetzt nur noch die Projectionen dieses Punktes auf die ursprünglichen Ebenen zu bestimmen.

Fällt man nun dm perpendicular auf $\beta\alpha$, so ist m die Horizontalprojection jenes Punktes; und wenn man ferner dd' perpendicular auf βy zieht, und $\beta d'$ nach $\beta m'$ auf $\beta\alpha'$ zurückführt, so ist m' dessen Verticalprojection. Folglich sind die Geraden pm und pm' die Projectionen des gesuchten Durchschnitts.

4) Nehmen wir endlich den Fall in Betracht, für welchen die gegebenen Ebenen parallel zur Projectionsebene sind (Fig. II — 4). Alsdann sind deren Tracen parallel zu dieser Linie (Einleit. 26); ihr Durchschnitt ist es auch, und die allgemeine Construction noch unzureichend. Inzwischen wird man diesem Hinderniss vermittelst einer Hülfebene ganz so zu begegnen wissen, wie im vorigen Falle. In der Figur hat man diese Ebene schief zur Projectionsebene gelegt; man hätte sie auch perpendicular hierzu nehmen können.

20. Aufgabe III. Den Durchschnitt einer Geraden und einer Ebene zu finden.

Der Weg zu dieser Auflösung besteht darin, durch die Gerade irgend eine Ebene zu legen, die Gerade zu suchen, darin sie die gegebene Ebene schneidet, und den Durchschnittspunkt dieser zwei Geraden zu bestimmen.

Die Construction gestaltet sich ungemein einfach, sobald die Hülfs Ebene perpendikulär zu einer der Projectionsebenen genommen wird. Es mögen (Fig. III — 1) $\alpha\alpha'$ die Tracen der gegebenen Ebene, und bc , $b'c'$ die Projectionen der Geraden sein. Nehmen wir zur Hülfs Ebene die, die Gerade enthaltende Verticalebene; ihre horizontale Trace ist bc , und ihre verticale mm' ein Perpendikel zu xy . Mögen d und m' die Punkte sein, wo diese Tracen jene der gegebenen Ebene schneiden; fällt man dd' perpendikulär zu xy , und zieht $m'd'$, so hat man die Verticalprojection des Durchschnitts der zwei Ebenen. Die Verticalprojection des gesuchten Punktes muß folglich in $m'd'$ enthalten sein. Nun aber muß derselbe auch in der Verticalprojection $b'c'$ der gegebenen Geraden liegen; folglich ist er im Durchschnitt o' dieser zwei Geraden enthalten. Folglich ergibt sich die horizontale Projection des gesuchten Punktes, durch das Ziehen eines Perpendikels $o'o$ zu xy , welches in o die Horizontalprojection bc der gegebenen Geraden schneidet.

Man kann den Punkt o auch direct angeben, sobald einmal o' gefunden worden ist, indem man die Hülfs Ebene perpendikulär zur Verticalebene nimmt. Die Tracen dieser Hülfs Ebene sind $n'n$ und $n'b'$, und sie schneiden in n und e' jene der gegebenen Ebene. Daher fälle man $e'e$ perpendikulär zu xy , und ziehe ferner en , so schneidet diese bm im gesuchten Punkte o .

Die Figur III — 2 stellt die Constructionen dar, welche ausgeführt werden müssen, wenn die, durch die gegebene Gerade gelegte Hülfs Ebene irgend eine Lage hat. Soll sie diese Gerade enthalten, so müssen ihre Tracen durch die der Geraden gehen. In Folge dessen bestimmt

man zuerst (18) die Tracen n und m' der gegebenen Geraden $[bc, b'c']$; dann führt man durch diese Tracen und durch einen, auf xy beliebig gewählten Punkt β die Linien βp und $\beta p'$. Gewiss ist es nun, dass die gegebene Gerade in der Ebene $p\beta p'$ liegt, da sie zwei Punkte in derselben hat.

Ist dies geschehen, so bestimmt man (19) die Gerade des Durchschnittes beider Ebenen, d. h. man zieht die Perpendikel dd' und $e'e$ zu xy durch die Punkte d und e' , wo die Tracen der Ebenen sich schneiden; dann die Geraden de und $d'e'$, welche Geraden die Projectionen des Durchschnitts beider Ebenen sind. Nun aber müssen die Projectionen des gesuchten Punktes in diesen Projectionen liegen, und auch in denen der gegebenen Geraden $[bc, b'c']$; folglich sind die Projectionen dieses Punktes bestimmt. Die Horizontalprojection ist in o , und die Verticalprojection in o' , folglich muss die, diese Projectionen verbindende Gerade oo' perpendicular zu xy sein.

Besonderer Fall. Wir merken nur einen einzigen besonderen Fall an, nämlich den, wobei die gegebene Gerade perpendicular zu einer der Projectionsebenen, z. B. zur horizontalen ist (Fig. III—3). Ihre Projection auf dieser Ebene ist ein einziger Punkt o , welcher zur Bestimmung der Geraden genügt; und was deren Verticalprojection $o'o''$ anlangt, so ist diese perpendicular zu xy . Hier muss die Hülfebene $cd d'$ vertical, und folglich deren verticale Trace dd' auch perpendicular zu xy sein; ihre horizontale Trace ist nur der einzigen Bedingung unterworfen, dass sie durch den Punkt o hindurch geh't. Sonst ist die übrige Construction dieselbe wie im allgemeinen Falle. Die Verticalprojection des gesuchten Punktes ist mit o' und die Horizontalprojection mit o bezeichnet worden.

Diese Construction lässt sich dadurch vereinfachen, dass man die horizontale Trace der Hülfebene, wie oe , parallel zur horizontalen Trace $\alpha\alpha$ der gegebenen Ebene,

oder auch wie *of* parallel zur Projectiionsaxe wählt. Im ersten Falle ist der Durchschnitt der zwei Ebenen auch parallel zu $a\alpha$ (Einleit. 23), und dessen Verticalprojection $e'o'$ parallel zu xy . Im zweiten Falle, ist der Durchschnitt dieser Ebenen parallel zu $a\alpha'$, folglich auch dessen Verticalprojection $f'o'$.

In diesem eben betrachteten besonderen Falle, kann man den Punkt o als Horizontalprojection eines in der gegebenen Ebene $a\alpha\alpha'$ gelegenen Punktes ansehen, und es ist klar, daß dieser letztere Punkt der Durchschnitt der Ebene $a\alpha\alpha'$ mit der in o errichteten Verticale sein müsse. Man sieht daher, daß die vorangehende Construction zur Auflösung folgender Aufgabe dient: aus einer der Projectionen eines, in einer Ebene gelegenen Punktes, die andere Projection zu finden.

21. Aufgabe. IV. Den Durchschnittspunkt dreier gegebenen Ebenen zu bestimmen.

Die Ebenen, paarweise genommen, bestimmen drei Gerade, welche durch den verlangten Punkt gehen. Folglich suche man, nach Aufgabe II, die Projectionen dieser Geraden; und sind die Constructionen genau ausgeführt, so schneiden sich die drei Horizontalprojectionen im nämlichen Punkte, welcher die Horizontalprojection des geforderten Punktes ist; die drei Verticalprojectionen schneiden sich auch in demselben Punkte, welcher die Verticalprojection des Punktes ist; endlich ist die, durch die zwei Projectionen gehende Gerade perpendicular zur Projectiionsaxe.

In der Figur IV sind ad , bf , ce die Horizontalprojectionen der Durchschnitte der drei Ebenen, dieselben paarweise genommen; $a'd'$, $b'f'$, $c'e'$ sind die verticalen Projectionen, und der gesuchte Punkt hat o und o' zu seinen Projectionen.

Durch mancherlei Bedingungen bestimmte Gerade und Ebenen.

22. Aufgabe V. Aus den Projectionen zweier Punkte, die Projectionen und wahre Gröfse der dieselben verbindenden Geraden zu finden.

a und a' , b und b' (Fig. V) mögen die Projectionen der zwei Punkte A und B sein. Es leuchtet ein, dafs man, die Projectionen der, diese zwei Punkte im Raume verbindenden Geraden AB hat, sobald die Geraden ab und $a'b'$ gezogen werden. Um die wahre Gröfse zu erhalten, ist zuvor zu erinnern, dafs die Linien aa' und bb' perpendicular zur Projectiionsaxe, und die Theile ra' und sb' den Entfernungen der Punkte A und B von der Horizontalebene gleich sind (15. 4). Diefs vorausgesetzt, so errichten wir nun in a und b zwei Verticalen, die eine ra' , und die andere sb' gleich: die Scheitel dieser Verticalen sind nichts Anderes als die Punkte A und B , und die sie verbindende Gerade ist die gesuchte Entfernung, welche mit den in der Figur gegebenen Stücken in wahrer Gröfse darzustellen ist.

Die zwei Verticalen sind perpendicular zu ab und in der nämlichen Ebene enthalten, woraus folgt, dafs wenn man sich durch den Punkt B eine Parallele zu ab denkt, bestimmt durch die andere Verticale, ein rechtwinkliges Dreieck entsteht, welches diese, ab gleiche Parallele zur Basis, die Differenz der zwei Verticalen zur Höhe, und die gesuchte Entfernung AB zur Hypothenuse hat. Dieses Dreieck nun läfst sich leicht darstellen; denn es genügt, parallel zu xy die Gerade $b'm$ zu führen, welche ra' in m begegnet, $mn = ab$ zu nehmen, und $a'n$ zu ziehen. Man sieht ein, dafs $a'n$ die gesuchte Entfernung ist.

Zu der nämlichen Construction kann man auf folgende Weise gelangen. Wenn eine Gerade parallel zu einer der Projectionsebenen ist, so projecirt sie sich auf

dieser Ebene in wahrer Gröfse; denken wir uns also, dafs auf ab eine Verticalebene errichtet sei, welche nothwendig die Gerade AB enthalten wird; ferner werde diese Verticalebene um die durch a errichtete Verticale drehend bewegt, bis sie zur verticalen Projectionsebene parallel geworden ist. Während dieser Drehung, bewegt sich die Linie ab um den Punkt a , ohne die Horizontalebene zu verlassen, und nimmt die Lage ac an, einer ab gleichen, und zu xy parallelen Linie. Alsdann findet sich der Punkt B in c horizontal projecirt, und da er seine Höhe nicht verändert hat, so mufs dessen Verticalprojection in derselben Entfernung von der Projectionsaxe sein; folglich ist dieselbe in n , im Durchschnitt der zwei Geraden cn und $b'n$, die eine ein Perpendikel, die andere eine Parallele zu xy . Folglich mufs $a'n$ die Verticalprojection der Geraden AB sein, nachdem diese parallel zur Verticalebene geworden ist; folglich ist $a'n$ die wahre Gröfse dieser Geraden. Diese Construction kommt darauf zurück $mn = ac = ab$ zu nehmen, wie in der vorangehenden.

Noch kann man die, zu den gegebenen Projectionen ab und $a'b'$ entsprechende Gerade AB , zu einem Trapeze gehörig, betrachten, dessen parallele Seiten perpendicular zu ab , und beziehentlich ra' und sb' sind; und dafs, wenn das Trapez um ab bis zum Zusammenfallen mit der Horizontalebene gedreht wird, die Gerade AB sich in ihrer wahren Gröfse darstellt. Dem zu Folge nehme man perpendicular zu ab , $af = ra'$, $bg = sb'$, und dann wird fg die wahre Gröfse sein.

Endlich werde bemerkt, dafs alle in der Verticalalebene vollzogenen Constructionen, ebenso in der Horizontalebene geschehen können *et. v. v.*

23. Aufgabe VI. Aus den Projectionen einer Geraden und eines Punktes, diejenigen einer, durch diesen Punkt gehenden Parallele zu dieser Geraden zu finden.

Es mögen ab und $a'b'$ (Fig. VI) die Projectionen der Geraden, c und c' diejenigen des Punktes sein; wird cd parallel zu ab , und $c'd'$ parallel zu $a'b'$ gezogen, dann hat man die Projectionen der verlangten Parallele.

Um diese Construction zu begründen, ist zu zeigen, daß die Projectionen zweier parallelen Geraden auf irgend einer Ebene, auch parallel sind. Und wirklich sind die projicirenden Ebenen dieser Parallelen, nach einem bekannten Satze (Einleit. 38), parallel unter sich. Demnach sind ihre Durchschnitte mit der Projectionsebene, oder mit anderen Worten, die Projectionen der zwei parallelen Geraden, auch parallel unter sich.

24. Aufgabe VII. Aus den Tracen einer Ebene, und einer der Projectionen einer, in dieser Ebene enthaltenen Geraden, die andere Projection zu finden.

Angenommen, die Horizontalprojection der Geraden sei gegeben, und durch dieselbe eine Verticalebene gelegt worden; so wird deren Durchschnitt mit der gegebenen Ebene die Gerade sein, deren Verticalprojection zu finden ist, was auf die Aufgabe II (19) zurückführt.

Sei aaa' (Fig. VII) die gegebene Ebene, und bc die gegebene Projection. Die Verticalebene durch bc hat zu ihrer verticalen Trace eine Perpendikel ce' zu xy ; und die Punkte b und c' , wo sich die Tracen der zwei Ebenen schneiden, sind Punkte der, bc zur Projection habenden Geraden. Da der Punkt b in der Horizontalebene liegt, so wird seine Verticalprojection auf xy im Fußpunkte des Perpendikels bb' liegen, und da der Punkt c' in der Verticalebene liegt, so ist er seine eigene Verticalprojection; folglich ist die Gerade $b'c'$ die gesuchte Verticalprojection.

25. Aufgabe VIII. Durch einen gegebenen Punkt, eine prarallele Ebene zu einer gegebenen Ebene, zu führen.

Es mögen a, a' (Fig. VIII—1) die Projectionen des gegebenen Punktes, und $\beta\beta, \beta\beta'$ die Tracen der gegebe-

nen Ebene sein. Die Durchschnitte zweier parallelen Ebenen vermittelt irgend einer Ebene, sind parallel unter sich; folglich weiß man schon, daß die Tracen der gesuchten Ebene den Tracen der gegebenen Ebene parallel sind.

Durch den gegebenen Punkt $[a, a']$ denken wir uns in der gesuchten Ebene zu deren horizontaler Trace eine parallele Gerade; dieselbe wird auch parallel zu βb sein, und jetzt sind ihre Projectionen leicht darzustellen; denn ihre Horizontalprojection ad , wird durch den Punkt a gehen, und parallel zu βb sein, während ihre Verticalprojection $a'd'$ durch den Punkt a' gehen wird, und parallel zu xy ist. Sei d' die verticale Trace dieser Geraden, so wird sie in der verticalen Trace der verlangten Ebene liegen müssen; zieht man folglich durch diesen Punkt $d'c'$ parallel zu $\beta b'$, so wird sich die verticale Trace der gesuchten Ebene ergeben. Um ihre horizontale Trace zu erhalten, verlängert man derselben verticale Trace bis zum Punkt γ , den Durchschnitt mit xy , und zieht γc parallel zu βb .

Bedarf es einer Bestätigung, so kann man direct einen Punkt der horizontalen Trace suchen, so wie ein solcher der verticalen Trace gefunden wurde; d. h. man wird durch den gegebenen Punkt eine Parallele zu $\beta b'$ ziehen, deren Projectionen ae und $a'e'$ sind, und nun den Punkt e bestimmen, wo dieselbe die Horizontalebene durchdringt, welcher Punkt der horizontalen Trace der verlangten Ebene angehören wird.

A n d e r e A u f l ö s u n g. Diese Aufgabe läßt sich dadurch allgemeiner lösen, daß man in der gegebenen Ebene irgend eine Gerade zieht, und durch den gegebenen Punkt eine Parallele zu dieser Geraden. Diese Parallele wird gänzlich in der gesuchten Ebene liegen müssen; in Folge dessen werden die Durchschnittspunkte dieser Parallele mit den Projectionsebenen einen Punkt in einer jeden der Tracen der gesuchten Ebene angeben, und da die Tracen dieser Ebene, denen der gegebenen Ebene, parallel sein müssen, so werden sie sich leicht darstellen lassen. Als

Bestätigung werden die beiden Tracen in einem Punkte der Projectionsaxe sich schneiden. Es mögen nun noch α, α' (Fig. VIII—2) die Projectionen des gegebenen Punktes, und $\beta\beta, \beta\beta'$ die Tracen der Ebene sein. Man habe willkürlich in diesen Tracen die Punkte m und n' genommen, und die Perpendikel $mm', n'n'$ auf die Linie xy gezogen. Der Punkt m' ist die Verticalprojection des Punktes m , n die Horizontalprojection von n' , und folglich sind die Geraden $mn, m'n'$ die Projectionen einer, in der Ebene $\beta\beta\beta'$ gelegenen Geraden, da jene die zwei Punkte m und n' in sich enthält. Um die Projectionen einer, durch den gegebenen Punkt gehenden, und zu dieser Linie parallelen Geraden zu haben, ziehe man ap und $a'p'$ beziehentlich parallel zu mn und $m'n'$. Alsdann suche man die Tracen p und q' dieser Parallele, ferner führe man die Geraden $p\gamma$ und $q'\gamma'$ beziehentlich parallel zu $\beta\beta$ und $\beta\beta'$. Diese Geraden sind die Tracen der gesuchten Ebene, und müssen die Projectionsaxe im nämlichen Punkte γ schneiden.

26. Aufgabe IX. Durch drei gegebene Punkte eine Ebene zu legen.

Hierdurch wird die Forderung ausgesprochen, die Tracen einer Ebene zu finden, welche durch drei aus ihren Projectionen bekannten Punkte hindurch geht. Zu diesem Behuf ziehe man Gerade durch je zwei und zwei der gegebenen Punkte. Da diese Geraden gänzlich in der gesuchten Ebene liegen, so bestimme man ihre Durchgangspunkte mit den Projectionsebenen, was drei Punkte einer jeden Trace der Ebene giebt. Sind die Constructionen mit Genauigkeit ausgeführt worden, so werden die drei Punkte einer jeden Trace in einer geraden Linie liegen, und überdies die beiden Tracen die Projectionsaxe in einem einzigen Punkte schneiden.

In Fig. IX sind die Projectionen der, durch die drei gegebenen Punkte gebildeten Dreiecke durch abc und $a'b'c'$ dargestellt; die Seite $[ab, a'b']$ schneidet die Projectionsebenen in h und v ; die Seite $[ac, a'c']$ in h' und v' , und

die Seite $[bc, b'c']$ in h'' und v'' . In Folge dessen, geht die horizontale Trace der gesuchten Ebene durch die Punkte h, h', h'' , die verticale Trace durch v, v', v'' , und diese zwei Tracen schneiden die Linie xy im nämlichen Punkte t .

Anmerkung. In besonderen Fällen kann es geschehen, dass die, zwei der gegebenen Punkte vereinigende Gerade, parallel zu einer der Projectionsebenen ist, z. B. zur verticalen. Alsdann ist der Durchschnittspunkt derselben mit dieser Ebene unendlich weit entfernt, und für die Construction undienlich. Dabei ist aber auch zu bemerken, dass dann die verticale Trace der gesuchten Ebene parallel zu der betreffenden Geraden sein muss, oder was dasselbe ist, zu ihrer verticalen Projection.

27. Aufgabe X. Ein Punkt und eine Gerade sind gegeben, man soll durch beide eine Ebene führen.

Wird durch den gegebenen Punkt eine Parallele zur gegebenen Geraden geführt, so liegt dieselbe in der gesuchten Ebene; dieß ist der Grund weswegen man die Tracen dieser zwei Linien bestimmen wird. Man ziehe eine Gerade durch die beiden horizontalen, eine andere durch die verticalen Tracen, wodurch sich sofort die Tracen der gesuchten Ebene ergeben, welche die Projectionen in demselben Punkte durchschneiden müssen.

In Fig. X sind die Projectionen des gegebenen Punktes a und a' , jene der gegebenen Geraden bc und $b'c'$, und jene der Parallele zu dieser Geraden ad , $a'd'$. Diese beiden Linien haben zu horizontalen Tracen die Punkte c und e , zu ihren verticalen b' und d' , und folglich sind die Geraden ce und $b'd'$ die Tracen der gesuchten Ebene.

Anmerkung. An Statt einer Parallele zur gegebenen Linie, könnte man eine, durch einen beliebigen Punkt dieser Linie und durch den gegebenen Punkt gehende Gerade anwenden. Man muss sich dann die Projectionen eines, zur Linie $[bc, b'c']$ gehörigen Punktes verschaffen; und hierzu genügt es, auf bc und $b'c'$ zwei, in demselben

Perpendikel zu xy gelegene Punkte zu nehmen (15. 4). Diese beiden Punkte verbindet man beziehentlich mit a und a' , und vollendet übrigens die Construction wie oben.

28. Aufgabe XI. Durch eine gegebene Gerade eine Ebene parallel zu einer gegebenen Geraden zu führen.

Man nehme (Fig. XI) irgend einen Punkt $[f, f']$ in der ersten Geraden $[ab, a'b']$, und ziehe durch ihn eine Parallele zur zweiten Geraden $[cd, c'd']$. Die verlangte Ebene muß diese Parallele und die erste Gerade enthalten, so daß es um zwei Punkte in jeder der Tracen zu kennen genügt, die Tracen dieser zwei Linien zu bestimmen. Die Construction ist nach der Figur zu leicht zu verfolgen, als daß es nöthig wäre, sie noch mehr zu entwickeln.

29. Aufgabe XII. Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene parallel zu zwei gegebenen Geraden zu führen.

Durch den gegebenen Punkt ziehe man Parallelen zu den zwei gegebenen Geraden; bestimme die Durchschnitte dieser Parallelen mit den Projectionsebenen, so hat man zwei Punkte einer jeden Trace der verlangten Ebene. Siehe die Figur XII.

30. Aufgabe XIII. Eine Gerade zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und zwei gegebene Gerade schneidet.

Erste Auflösung (Fig. XIII — 1). Man stelle die Tracen einer ersten, durch den Punkt, und eine der Geraden gehende Ebene dar (27); auch die Tracen einer zweiten durch denselben Punkt und die andere Gerade gehende Ebene; da die verlangte Linie in den zwei Ebenen zugleich liegen muß, so wird sie keine andere sein, als deren Durchschnitt, und mithin leicht zu bestimmen (19).

Es mögen a und a' die Projectionen des gegebenen Punktes, und bc und $b'c'$, de und $d'e'$ diejenigen der Geraden sein. Wird die Construction nach obiger Angabe

vollzogen, so findet man, daß $b\alpha$ und $\alpha c'$ die Tracen der ersten, $d\beta$ und βe diejenigen der zweiten Ebene sind, und daß der Durchschnitt der zwei Ebenen gf und $g'f'$ zu Projectionen hat. Dieser Durchschnitt ist die gesuchte Linie.

Die Richtigkeit der Coustruction ergibt sich also auf dreierlei Weise: 1) muß dieser Durchschnitt durch den gegebenen Punkt gehen, 2) der ersten, 3) auch der zweiten gegebenen Geraden begegnen.

Zweite Auflösung (Fig. XIII—2). Man bestimme die, durch den gegebenen Punkt $[a, a']$ und die gegebene Gerade $[de, d'e']$ gehende Ebene $d\beta e'$; suche mittelst der gewöhnlichen Construction (20), den Durchschnitt $[f, f']$ dieser Ebene mit der andern gegebenen Geraden $[bc, b'c']$, und verbinde hierauf diesen Durchschnitt mit dem gegebenen Punkte. Man erhält so die verlangte Gerade, welche im Allgemeinen die erste Gerade schneiden wird.

Dritte Auflösung (Fig. XIII—3). Man nehme willkürlich die zwei Punkte $[m, m']$ und $[n, n']$ mit der gegebenen Linie $[de, d'e']$; denke sich zwei, beziehentlich durch diese zwei Punkte und den gegebenen Punkt $[a, a']$ gehende Gerade; ferner bestimme man die Punkte $[p, p']$ und $[q, q']$ wo sie die, auf bc errichtete Verticalebene schneiden, welche augenscheinlich die andere gegebene Gerade enthält. Diese zweite Gerade schneidet die Gerade $[pq, p'q']$, welche durch die zwei so bestimmten Punkte geht, in einem Punkte $[f, f']$; es ist klar, daß man durch Verbindung dieses Punktes mit dem gegebenen Punkte $[a, a']$ eine Gerade $[af, a'f']$ erhält, welche mit der ersten der gegebenen Geraden in einerlei Ebene liegt, und diese folglich schneiden muß. Diese durch den gegebenen Punkt, und die zwei gegebenen Geraden, gehende Gerade, ist die verlangte Linie.

Gerade, und perpendikuläre Ebenen.

31. Aufgabe XIV. Aus einem gegebenen Punkte ein Perpendikel auf eine Ebene zu fallen, und dann den Fußpunkt und die wahre Gröfse dieses Perpendikels zu bestimmen.

Zuvörderst ist zu beweisen, dafs die Projectionen dieses Perpendikels perpendikulär zu den Tracen der gegebenen Ebene sind. Die Ebene, welche diese Linie auf die Horizontalebene projicirt, ist zugleich perpendikulär zur Horizontalebene und zur gegebenen Ebene (Einleit. 35); umgekehrt folglich sind sie perpendikulär zu dieser projicirenden Ebene, und dem zu Folge ist es ihr Durchschnitt auch (Einleit. 37). Da nun dieser Durchschnitt die horizontale Trace der gegebenen Ebene ist; so ist diese Trace perpendikulär zu den, in der projicirenden Ebene gelegenen Linien; folglich ist sie es zur Horizontalprojection des Perpendikels. Dieselbe Schlussfolge hat man in Betreff der Verticalprojection.

Nach dieser Vorbereitung ziehe man aus den Projectionen a und a' des gegebenen Punktes (Fig. XIV), ab , $a'b'$ beziehentlich perpendikulär zu den Tracen αm , $\alpha m'$ der gegebenen Ebene; so ist es klar, dafs man die Projectionen der verlangten Perpendikel haben wird. Durch eine bekannte Construction (20) bestimmt man die Projectionen b und b' des Fußpunkts dieses Perpendikels, d. h. des Durchschnittspunkts desselben mit der gegebenen Ebene. Endlich findet man, nach einer gleichfalls bekannten Construction (22) die wahre Gröfse $a'c$.

32. Aufgabe XV. Durch einen Punkt eine Ebene und eine Gerade, perpendikulär zu einer gegebenen Geraden zu führen.

Suchen wir zuerst die Tracen der, zu der gegebenen Geraden perpendikulären Ebene. Nach der vorangehenden Nummer, müssen dieselben perpendikulär zu den Projectionen dieser Geraden sein; folglich genügt es, einen Punkt einer dieser Tracen zu haben, um sie alle

beide zu kennen. Mögen a, a' (Fig. XV) die Projectionen eines gegebenen Punktes, und $bc, b'c'$ diejenigen einer gegebenen Geraden sein. Durch den Punkt $[a, a']$ denke man sich eine horizontale Parallele zur horizontalen Trace der gesuchten Ebene; ihre Horizontalprojection wird parallel zu dieser Trace, und perpendicular zur Horizontalprojection bc der gegebenen Geraden sein müssen, und jetzt ist diese Projection ad eine bekannte Linie. Die Verticalprojection dieser Horizontalen anlangend, so muß sie eine Gerade $a'd'$, parallel zu xy sein. Nun aber liegt diese Horizontale gänzlich in der verlangten Ebene; folglich ergibt sich durch Aufsuchung des Durchgangs d' dieser Horizontalen mit der Verticalebene, ein Punkt der verticalen Trace dieser Ebene. Nun ziehe man durch diesen Punkt, die Gerade am' perpendicular zu $b'c'$, ferner am perpendicular zu bc , so ist mam' die gesuchte Ebene.

Noch sind die Projectionen des, aus dem gegebenen Punkte auf die gegebene Gerade gefällten Perpendikels zu finden. Zu diesem Zweck suche man die Projectionen p und p' des Durchgangs dieser Geraden mit der Ebene mam' , ziehe ferner die Geraden ap und $a'p'$, so sind diese Geraden die gesuchten Projectionen.

Anmerkung. Man hätte die Construction der perpendicularen Ebene mam' auf eine andere Weise darstellen können, wie folgt. Durch einen beliebigen Punkt der Projectionsaxe fälle man auf die Projectionen der gegebenen Geraden Perpendikel; sie werden die Tracen einer zu dieser Geraden perpendicularen Ebene sein, und dann wird es sich nur noch darum handeln, durch den gegebenen Punkt eine Ebene parallel zu einer Ebene zu führen, eine bereits gelösete Aufgabe (25).

Winkel der Geraden und Ebenen.

33. Aufgabe XVI. Aus den Projectionen einer Geraden, deren Neigungswinkel zu beiden Projectionsebenen zu finden.

Wird durch einen, in einer Schrägen zu einer Ebene genommenen Punkt, ein Perpendikel auf diese Ebene gefällt, und durch die Fußpunkte der Schrägen und des Perpendikels eine Gerade gezogen, so ist es der, von dieser Geraden und der Schrägen eingeschlossene Winkel, welcher die Neigung der Schrägen zur Ebene mißt (Einleit. 18). D. h. mit anderen Worten, die Neigung einer Geraden in Bezug auf eine Ebene wird durch den Winkel gemessen, welchen sie mit ihrer Projection in dieser Ebene einschließt.

Es mögen daher (Fig. XVI) ab und $a'b'$ die Projectionen einer Geraden sein; es soll zuerst der Winkel dieser Geraden mit ihrer horizontalen Projectionsebene dargestellt werden. Deshalb bestimme man die Tracen a und b' der Geraden, drehe ferner die Ebene abb' um bb' , bis sie mit der Verticalebene zusammenfällt. Während dieser Bewegung ändert die Linie ab ihre Grösse nicht; und da sie stets perpendicular zu bb' bleibt, so nimmt sie eine solche Lage wie bm auf xy ein. Zu gleicher Zeit kommt die, die Punkte a und b' im Raume verbindende Gerade nach $b'm$, und folglich klappt sich der gesuchte Winkel in wahrer Grösse auf den Winkel $b'mb$.

Man kann auch diesen Winkel in der Horizontalebene, durch Umlegung der Ebene abb' um ab erhalten; dann fällt die Verticale bb' auf eine Perpendikel zu ab , wie nb es ist, und der gesuchte Winkel wird nab sein.

In Betreff des Winkels dieser Geraden mit der Verticalebene, verfährt man auf ähnliche Art. Derselbe ist apa' in Bezug auf die Horizontal- $qb'a'$ hinsichtlich der Verticalebene.

Wenn die Punkte a und b' sehr entfernt sind, so ist diesem Verfahren folgendermaßen auszuweichen. Man nehme auf der Geraden irgend zwei Punkte, deren Projectionen c und c' , d und d' sein mögen. Um die Neigung dieser Geraden zur Horizontalebene zu haben, denke man sich durch den Punkt $[d, d']$ eine Parallele zu ab , und suche den Winkel, welchen dieselbe mit der Geraden

macht. Hierzu genügt es die, diesen Winkel enthaltende Verticalebene um die, in c errichtete Verticale zu drehen, damit sie parallel zur verticalen Projectionsebene wird. Dann projecirt sich der gesuchte Winkel auf dieser Ebene in seiner wahren Gröfse $c'rs$. Eben so findet man den Winkel der Geraden mit der Verticalebene.

34. Aufgabe XVII. Aus den Tracen einer Ebene, die Neigungswinkel derselben zu einer jeden Projectionsebene, so wie den Winkel der zwei Tracen, zu finden.

Seien qp und qr (Fig. XVII.) die Tracen einer Ebene; es werde der Winkel derselben mit der Horizontalebene gesucht. Im Allgemeinen wird der Winkel zweier Ebenen durch denjenigen gemessen, welchen zwei, in jeder dieser Ebenen, aus demselben Punkte ihres gemeinschaftlichen Durchschnits, errichtete Perpendikel bilden (Einleit. 40). Daher ziehe man in der Horizontalebene ab perpendicular zur Trace pq , und in der Verticalebene bc perpendicular zur Projectionssaxe; die Gerade, welche im Raume die Punkte a und c verbindet ist in der gegebenen Ebene enthalten, und nach einem bekannten Lehrsatz perpendicular zu pq (Einleit. 19). Folglich ist der Winkel, welchen sie mit ab einschließt derjenige, auf dessen Construction es ankommt.

Dieser Winkel gehört zu einem rechtwinkligen Dreiecke, dessen Basis ab und Höhe bc ist, und welches leicht auf eine der Projectionsebenen umgelegt werden kann. Um es auf die Verticalebene umzulegen, dreht man dasselbe um bc : nimmt dann auf der Projectionssaxe $bA=ba$, so ist cAb der gesuchte Winkel. Um dasselbe auf die Horizontalebene umzulegen, errichtet man zu ab das Perpendikel bC gleich bc , so wird Cab der gesuchte Winkel sein.

Der Winkel der gegebenen Ebene mit der Verticalebene wird auf dieselbe Weise dargestellt. Man ziehe bd perpendicular zur Trace qr , und be perpendicular zu xy . Die Gerade, welche im Raume die Punkte d und e

verbindet, schließt mit db den verlangten Winkel ein, und man kann diesen Winkel entweder auf die Horizontalebene umlegen, und er ist eDb , oder auf die Verticalebene, und dann ist derselbe Edb .

Es erübrigt noch den Winkel der zwei Tracen zu kennen, einen solchen, zu welchem man mittelst einer neuen Umklappung gelangt. Weiter oben wurde bemerkt, daß die Gerade im Raume, zwischen den Punkten a und c , perpendicular zu pq sei; woraus hervorgeht, daß wenn die gegebene Ebene pqr sich um ihre Trace pq bis zum Zusammenfallen mit der Horizontalebene drehend bewegt, diese Gerade auf ac' perpendicular zu pq fallen wird. Ueberdies ändert sich die Entfernung cq nicht; folglich kommt der Punkt c in den Durchschnitt c' , der Geraden ac' und den aus dem Mittelpunkte q mit dem Halbmesser cq beschriebenen Umkreis. Folglich fällt die Trace qr mit der, durch die Punkte q und c' gezogenen Geraden qs zusammen; und es muß pqs der Winkel der zwei Tracen sein. Es ist zu bemerken, daß man $ac = aC = cA$ haben wird.

35. Aufgabe XVIII. Den Winkel zweier Geraden darzustellen, deren Projectionen bekannt sind.

Schneiden sich die zwei Geraden nicht, so erkennt man dies daran, daß der Durchschnittspunkt ihrer Horizontalprojectionen, und derjenige ihrer Verticalprojectionen, nicht im nämlichen Perpendikel zur Projectiionsaxe liegen (13). Dann zieht man durch irgend einen Punkt Parallelen zu diesen Geraden, und nimmt den Winkel dieser Parallelen für den, der gegebenen Geraden.

Es mögen (Fig. XVIII—1) a und a' , ab und $a'b'$, ac und $a'c'$, die Projectionen dieses Punktes und der zwei Parallelen sein. Man bestimme die horizontalen Durchgänge b und c dieser zwei Linien, und ziehe bc . Diese Gerade kann man als Basis eines Dreieckes ansehen, dessen Scheitel in a und a' projectirt ist; der, dieser Basis

gegenüber liegende Winkel ist zu bestimmen, und dafür genügt es das Dreieck zu construiren.

Zu diesem Zwecke, fälle man ad perpendicular auf bc , und denke sich eine Gerade durch den Punkt d und den Scheitel $[a, a']$ gezogen. Einem bekannten Lehrsatze (Einleit. 19) zu Folge, muß dieselbe perpendicular zu bc sein; dergestalt, daß wenn das Dreieck um seine Basis bc bis zum Anschließen an die Horizontalebene gedreht wird, dieses Perpendikel in die Richtung von da zu liegen kommt. Es erübrigt folglich nur noch die Auffindung der wahren Gröſſe dieses Perpendikels. Nun aber leuchtet ein, daß dasselbe die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen Catheten gleich ad und $a'm$ sind; folglich nehme man auf xy $md' = ad$, so muß $a'd'$ diese Hypothenuse sein. Man trage dieselbe von d nach A , und ziehe die Geraden bA , cA . Dann ist das Dreieck construirt, und bAc der gesuchte Winkel.

Zur Construction des Dreieckes diene dessen Höhe; man hätte auch die Seiten anwenden können. Die Horizontalprojectionen dieser Seiten sind ab und ac , die Verticalprojectionen $a'b'$ und $a'c'$; um daher ihre wahren Gröſſen zu haben, nehme man $mb'' = ab$, $mc'' = ac$, ferner ziehe man die Hypothenusen $a'b''$, $a'c''$. Dann beschreibe man zwei Bogen, den einen aus dem Mittelpunkte b mit einem Halbmesser gleich $a'b''$, und den andern, aus dem Mittelpunkte c mit einem Halbmesser gleich $a'c''$; der Durchschnitt dieser zwei Bogen bestimmt den Scheitel A , und folglich den Winkel bAc .

Besondere Fälle. 1) Die allgemeine Construction setzt voraus, daß die zwei Schenkel des Winkels die Horizontalebene durchschneiden. Nehmen wir an (Fig. XVIII — 2), daß einer derselben, derjenige, dessen Projectionen ac und $a'c'$ sind, parallel zu dieser Ebene sei. In diesem Falle ist die horizontale Träce bx der, den Winkel enthaltenden Ebene parallel zu ac . Uebrigens kann man noch diesen Winkel auf die Horizontalebene vermittelst des Perpendikels ad umlegen. Der einzige

Unterschied zwischen dieser und der allgemeinen Construction besteht darin, daß die horizontale Seite parallel zu bf bleibt, und eine Lage wie AC annimmt. Wären die zwei gegebenen Geraden parallel zur Horizontalebene, so leuchtet ein, daß ihre Projectionen auf dieser Ebene einen Winkel bilden würden, welcher dem der Geraden selbst gleich wäre.

2) Die allgemeine Construction setzt auch voraus, daß der Scheitel des Winkels außerhalb der Horizontalebene liegt. Ist dem nicht so, dann kann man durch einen, in einem der Schenkel des Winkels genommenen Punkt eine Parallele zum anderen Schenkel ziehen; der Winkel welchen diese Parallele mit der ersten Seite bildet, ist dem gesuchten Winkel gleich, und dessen Bestimmung ohne Schwierigkeit. Der Fall, um welchen es sich handelt, ist in Fig. XVIII—3 entwickelt. Die Geraden, deren Neigungswinkel man sucht, haben ab und $a'b'$, ac und $a'c'$ zu Projectionen; die zur zweiten Geraden, durch einen Punkt der ersten gezogene Parallele ist in $b\gamma$ und $b'\gamma'$ projecirt; und der Winkel dieser Parallele mit der ersten Geraden nach $aA\gamma$ umgelegt.

36. — Aufgabe XIX. Durch den Durchschnittspunkt zweier gegebenen Geraden eine Gerade zu ziehen, welche den Winkel dieser Geraden halbt.

ab , $a'b'$ (Fig. XIX) mögen die Projectionen der ersten, ac , $a'c'$ diejenigen der zweiten Geraden sein. Man construirt zuvörderst wie in der vorigen Aufgabe, den von diesen Linien gebildeten Winkel bAc , und ziehe die diesen Winkel in zwei gleiche Theile theilende Gerade Af . Klar ist es, daß wenn man das Dreieck bAc in seine erste Lage zurückgeführt, die Linie Af zur verlangten wird, deren Projectionen bestimmt werden müssen. Nun aber ändert sich der Durchschnittspunkt f dieser Linie mit der Basis bc , während dieser Bewegung nicht; und da er zur Horizontalebene gehört, so ist er seine eigene Horizontalprojection selbst. Seine Verticalpro-

jection f' ergibt sich durch das Fällen des Perpendikels ff' auf xy . Eine der Projectionen der gesuchten Geraden muß folglich durch den Punkt f , die andere durch f' gehen. Ueberdies müssen sie auch durch die Projectionen a und a' des Scheitels des Winkels gehen; folglich sind endlich af und $a'f'$ die Projectionen dieser Geraden.

Anmerkung. Soll die gesuchte Gerade den Winkel der gegebenen Geraden nach irgend einem Verhältnisse theilen, so genügt es, die Linie Af dergestalt zu ziehen, daß sie den Winkel bAc nach dem gegebenen Verhältnisse theilt. Das Uebrige der Construction bleibt unverändert.

37. Aufgabe XX. Den Winkel einer Geraden und einer Ebene darzustellen.

Es ist leicht zu erkennen, daß wenn man von einem beliebigen Punkte der Geraden ein Perpendikel auf die Ebene fällt, der Winkel dieser zwei Geraden das Complement für den gesuchten Winkel sein wird. Die Forderung ist also auf die Construction des Winkels zweier Geraden zurückgeführt.

Es mögen daher (Fig. XX) am , am' , die Tracen der Ebene, und ab , $a'b'$ die Projectionen der Geraden sein. Auf diesen Projectionen nehme man die Punkte a und a' so, daß sie in demselben Perpendikel zu xy sind, und ziehe durch diese Punkte die Perpendikel ac , $a'c'$ auf die Tracen der Ebene; sie müssen die Projectionen eines auf die Ebene, durch einen Punkt der gegebenen Geraden, gefällten Perpendikels sein (31). Dann construirt man, wie in der Nummer 35, den Winkel dieses Perpendikels mit der Geraden; und der so gefundene Winkel bAc , hat den gesuchten Winkel zum Complement. Wenn man folglich Ah perpendicular zu Ac zieht, so muß bAh der gesuchte Winkel sein.

38. Aufgabe. Den Winkel zweier Ebenen darzustellen.

Man kann diese Aufgabe auf den Winkel zweier Geraden zurückführen; denn werden aus einem beliebigen

Punkte des Winkels dieser Ebenen, Perpendikel auf diese Ebenen gefällt, so weiß man, daß der Winkel dieser Perpendikel das Supplement des Winkels der Ebenen ist (Einleit. 45). Die Aufgabe läßt sich aber einfacher nach folgender anderen Art lösen. Man führe eine perpendikuläre Ebene zum Durchschnitt der gegebenen Ebenen, so daß solche diese zwei Ebenen in Geraden schneidet, welche unter sich den verlangten Winkel bilden, und legt, um diesen Winkel zu erkennen, seine Ebene auf eine der Projectionsebenen um. Es ist dieß diejenige Construction, welche hier entwickelt werden soll.

$\alpha\alpha$, $\alpha\beta\alpha'$ (Fig. XXI) mögen die Ebenen sein. Man bestimme die Horizontalprojection ab ihres Durchschnitts; und da die Tracen einer, zu einer Geraden perpendikulären Ebene, perpendikulär zu den Projectionen dieser Geraden sein müssen (31), so ziehe man perpendikulär zu ab die Gerade gh , und sehe dieselbe als die horizontale Trace einer, zum Durchschnitt der gegebenen Ebenen perpendikulären Ebene an. Diese Ebene schneidet die gegebenen Ebenen in zwei Geraden, davon die eine nach g , die andere nach h geht, und welche mit gh ein Dreieck bilden, darin der, gh gegenüberliegende Winkel der gesuchte ist. Dieses Dreieck werde um seine Basis gh bis zum Zusammenfallen mit der Horizontalebene gedreht. Der Scheitel dieses Dreiecks liegt in der Verticalebene $\alpha\beta\alpha'$; nun aber ist diese Ebene perpendikulär zu gh , weil es gh zu ab ist; folglich ist die Gerade, welche den Punkt c mit dem Scheitel des Dreiecks verbindet, perpendikulär zu gh ; folglich wird sie durch Umlegung in die Richtung ca fallen. Es erübriget noch derselben wahre Länge zu finden.

Man bemerke, daß die Ebene des Dreiecks perpendikulär zum Durchschnitt der gegebenen Ebene ist, daß die besagte Gerade in der Ebene des Dreiecks liegt, und daß sie folglich auch perpendikulär zu diesem Durchschnitt ist. Um sie in wahrer Gröfse zu erhalten, drehe man die Verticalebene $\alpha\beta\alpha'$ um ihre verticale Trace $\beta\alpha'$, bis $\beta\alpha$ auf xy fällt. Die Punkte α und c beschreiben die

Kreisbogen ap , cq um den Mittelpunkt b , und gelangen nach p und q . Dann muß der Durchschnitt der zwei gegebenen Ebenen über $a'p$ zu liegen kommen, und die gesuchte Entfernung der auf $a'p$ gefällte Perpendikel qr sein. Man trage daher qr aus c nach N , ziehe die Geraden Ng , Nh ; so ist gNh der gesuchte Winkel.

39. Aufgabe XXII. Eine Ebene zu finden, welche durch den Durchschnitt zweier gegebenen Ebenen geht, und den Winkel dieser Ebenen halbirt.

Angenommen (Fig. XXII), man hätte die nämlichen Constructionen vollzogen, wie in der vorigen Aufgabe, und daß gNh der Winkel der gegebenen Ebene $a\alpha a'$, $a\beta a'$ sei. Man halbire diesen Winkel durch die Gerade Nk , welche gh im Punkte k schneidet; bemerke ferner, daß wenn man die Ebene dieses Winkels in ihre wahre Lage zurückführt, die Linie Nk in die verlangte Ebene kommen wird. Dabei aber geht diese Linie fortwährend durch den Punkt k ; und da dieser Punkt in der Horizontalebene liegt, so folgt, daß er zur horizontalen Trace der gesuchten Ebene gehört. Ueberdies muß die eine dieser Tracen nach a und die andere nach a' gehen; folglich ist diese Ebene gänzlich bestimmt, und keine andere als $a\gamma a'$.

40. Aufgabe XXIII. Den Winkel zweier Geraden auf den Horizont zu reduciren.

Soll eine Landkarte gefertigt werden, so denke man sich alle bemerkenswerthe und darzustellende Punkte durch Gerade unter einander verbunden, dergestalt, daß dadurch Dreiecke gebildet werden; sind dabei alle diese Punkte in demselben Niveau, dann trägt man diese Dreiecke, vermittelst Construirung ähnlicher Dreiecke, nach einem passenden Maßstabe auf die Karte. Liegen aber die Punkte in verschiedenen Höhen, wie dies in Gebirgsgegenden vorkommt, so denkt man sich zuvor alle diese Dreiecke auf eine Horizontalebene projecirt; und die aus diesen Projectionen hervorgehenden Dreiecke sind es, wel-

che man mittelst ähnlicher Dreiecke auf die Karte überträgt.

Man sieht daher, daß die Karte keineswegs die Winkel im Raume, sondern nur ihre Projectionen zeigt; und handelt es sich um die Horizontreduction des Winkels zweier Geraden, so meint man damit dessen Projection auf eine Horizontalebene. Behufs derselben mißt man direct auf dem Terrain nicht allein den Winkel der zwei Geraden, sondern auch diejenigen, welche sie mit einem Lothe bilden; und dies sind die gegebenen Stücke, vermittelst welcher man der aufgestellten Forderung nachkommt. Größerer Deutlichkeit wegen, sollen durch L und L' die zwei Geraden, durch A der Winkel derselben, und durch V und V' die zwei anderen Winkel bezeichnet werden.

In der verticalen Projectionsebene (Fig. XXIII), errichte man mn perpendicular zur Projectiionsaxe xy , mache den Winkel mnp gleich V , und betrachte die Projectionsebene als die Ebene des Winkels V selbst, was offenbar gestattet ist. Alsdann ist die Linie np jene, welche durch L bezeichnet wurde, und man muß nun die andere Linie L' als durch den Punkt n gehend sich denken, wo sie mit mn den Winkel V' , und mit np den Winkel A einschließt, dessen Horizontalprojection verlangt wird. Der Schenkel L schneidet die Horizontalebene im Punkte p , und die Aufgabe beschränkt sich darauf, den Durchschnittspunkt des Schenkels L' mit dieser Ebene zu bestimmen. Zu diesem Zweck, ziehe man die Gerade nq , welche mit mn den Winkel $mng = V'$ einschließt, und xy in q schneidet, beschreibe ferner aus dem Mittelpunkte m mit dem Halbmesser mq den unbestimmten Bogen qa . Der Schenkel L' kann die Horizontalebene nirgends anders als in einem Punkte dieses Bogens schneiden, so daß es genügt, die Entfernung dieses Punktes vom Punkte p zu finden. Nun aber ist diese, in der Ebene des Winkels A gedachte Entfernung, die Grundlinie eines Dreiecks, dessen Seiten gleich np und nq sind; macht man daher den Winkel $pnr = A$

und nimmt $nr = nq$, so ist die Gerade pr der gesuchten Entfernung gleich. Beschreibt man nun aus dem Mittelpunkt p mit dem Halbmesser pr den Bogen rb , so ist der Durchschnitt s desselben mit dem Bogen qa , der Durchschnittspunkt des zweiten Schenkels L' mit der Horizontalebene. Folglich sind mp und ms die Projectionen der Schenkel L und L' ; folglich endlich ist pms der Winkel A .

Kürzeste Entfernung zweier Geraden. Auflösung der verschiedenen Fälle des dreiseitigen Winkels.

41. Aufgabe XXIV. Die kürzeste Entfernung zweier, nicht in einer Ebene liegenden Geraden, darzustellen.

Die Reihenfolge der zu vollziehenden Constructionen ist in der Einleitung pag. 16 zur Genüge angezeigt; wäre sie aber noch nicht bekannt, so würde man folgendermaßen dazu gelangen.

Mögen A und B die zwei gegebenen Geraden sein (Fig. a , Taf. IV). Durch die Gerade A führe man eine Ebene PP parallel zu der Geraden B . Diese Ebene muß überall von der Ebene PP gleichweit entfernt sein, und da die verlangte kürzeste Entfernung, einen Punkt der Geraden B mit einem Punkte dieser Ebene verbinden muß, so folgt daß sie nicht kleiner sein kann, als das, aus einem Punkte der Geraden B auf die Ebene PP gefällte Perpendikel. Man muß also untersuchen, ob dieses jener gleich sein kann.

Angenommen, man habe wirklich durch einen Punkt von B ein Perpendikel auf die Ebene PP gefällt, und durch dessen Fußpunkt eine Gerade C parallel zu B gezogen. Da die Ebene PP parallel zu B ist, so liegt diese Parallele gänzlich in dieser Ebene (Einleit. 26. Zus. I), und folglich muß sie die Gerade A schneiden. Zieht man nun durch den Durchschnittspunkt eine Parallele zu dem auf die Ebene PP gefällten Perpendikel, so muß

diese mit der Geraden B in einerlei Ebene liegen, und der zwischen den Geraden A und B enthaltene Abschnitt dieser Parallele, ist offenbar diesem Perpendikel gleich; folglich ist dieser Abschnitt die verlangte kürzeste Entfernung.

Wenden wir die Methode der Projectionen auf die so eben beschriebenen Constructionen an. Es mögen ab , $a'b'$ (Fig. XXIV), die Projectionen der Geraden A , und cd , $c'd'$ jene der Geraden B sein. Zuvörderst muß man durch A die zu B parallele Ebene PP führen; es ist die Aufgabe XI. Man nimmt daher auf A einen Punkt $[o, o']$, zieht durch denselben eine Parallele $[om, o'm']$ zu B , construirt die Tracen m und n' dieser Parallele, auch die Tracen a und b' der Geraden A ; zieht ferner die Geraden ama und $a'b'n'$, so sind diese die Tracen der Ebene PP .

Sofort fällt man nun durch einen Punkt der Geraden B ein Perpendikel auf diese Ebene. Nimmt man den Punkt $[p, p']$, so wird man die Projectionen dieses Perpendikels durch das Ziehen der Perpendikel pq , $p'q'$ auf die Tracen der Ebene man' erhalten (31); ferner wird man durch das bekannte Verfahren (20), die Projectionen r und r' des Fußpunkts dieses Perpendikels finden.

Hierauf ziehe man, um die Projectionen der, durch diesen Punkt gehenden zur Geraden B parallelen C zu haben, rs und $r's'$ beziehentlich parallel zu cd und $c'd'$. Diese Projectionen schneiden jene der Geraden A in den Punkten s und s' ; nun aber müssen diese Punkte die Projectionen des Durchschnitts der Linie A mit der Parallele C sein; zieht man daher von diesen Punkten die Linien st und $s't'$ parallel zu den Projectionen des durch jene der Geraden B begränzten Perpendikels, so hat man die Projectionen der verlangten kürzesten Entfernung, und es wird nachher leicht sein, deren wahre Gröfse $s'u'$ zu erhalten. Zum Ueberflufs führen wir noch an, daß die Geraden ss' und tt' perpendicular auf xy sein müssen.

Anmerkungen. Angenommen, die Gerade B schneide A ; dann ist die Ebene PP keine andere als jene

der zwei Geraden. Die Linie durch welche die kürzeste Entfernung gemessen wird, ist stets perpendicular zu dieser Ebene; aber da sie durch den Durchschnittspunkt der zwei Geraden geht, so folgt, dass die kürzeste Entfernung Null ist.

Wenn die zwei Geraden A und B parallel sind, so fällt die, zu B durch einen Punkt von A parallel gezogene Linie, mit dieser letzteren Geraden zusammen; die Ebene PP ist folglich unbestimmt, und das allgemeine Verfahren unzureichend. In diesem Falle aber, erhält man die kürzeste Entfernung leicht dadurch, dass man aus einem Punkte einer der zwei Geraden ein Perpendikel auf die andere fällt.

42. Aufgabe XXV. Aus den drei Seiten eines dreiseitigen Winkels, die drei Neigungswinkel zu finden.

In einem dreiseitigen Winkel hat man drei Seiten und drei Neigungswinkel, d. h. mit anderen Worten, drei ebene Winkel und drei Flächenwinkel. Verlangt man die Bestimmung dreier dieser Stücke, vermittelt der drei andern, so sind sechs Fälle zu untersuchen; denn die gegebenen Stücke können nach sechs verschiedenen Verbindungen genommen werden. Denn, man kann als gegebene Stücke nehmen: 1) die drei Seiten, 2) zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, 3) zwei Seiten und den, einer derselben gegenüberliegenden Neigungswinkel, 4) eine Seite und zwei anliegende Neigungswinkel, 5) eine Seite, einen der anliegenden, und der gegenüberliegenden Neigungswinkel, 6) die drei Neigungswinkel.

Es ist aber leicht einzusehen, dass man die drei letzten Fälle auf die drei ersten, vermittelt des supplementären, dreiseitigen Winkels zurückführen kann (Einleit. 46). Nennen wir a, b, c die Seiten eines dreiseitigen Winkels, und α, β, γ die Neigungswinkel; und nehmen z. B. an, dass man die drei Neigungswinkel α, β, γ kennt, und die Seiten a, b, c finden will. Man nehme die Supplemente a', b', c' der Neigungswinkel, nämlich: $a' = 180^\circ - \alpha, b' = 180^\circ - \beta, c' = 180^\circ - \gamma$; so sind diese

: m :

: : ψ : : ψ :

: : m : : m : : m :

Supplemente die Seiten des supplementären dreiseitigen Winkels. Nun aber, nehmen wir an, daß man die Neigungen der Seiten in diesem neuen dreiseitigen Winkel zu finden weiß, und bezeichne diese Neigungen durch α' , β' , γ' . Nimmt man die Supplemente, so kennt man dann die Seiten a , b , c , des ersten dreiseitigen Winkels, nämlich: $a = 180^\circ - \alpha'$, $b = 180^\circ - \beta'$, $c = 180^\circ - \gamma'$. Auf ähnliche Weise reducirt sich der vierte Fall auf den zweiten, und der fünfte auf den dritten; folglich genügt es die drei ersten zu betrachten.

Der in der Aufgabe vorgelegte Fall soll zuerst behandelt werden. Zuvor erinnern wir aber, daß zur Bildung eines dreiseitigen Winkels mit drei gegebenen Seiten, stets zwei Bedingungen erfüllt werden müssen: nämlich daß die Summe der drei Seiten kleiner als vier rechte Winkel, und daß die größte Seite kleiner als die Summe der beiden anderen sei. Diese Bedingungen sind sonst die allein nothwendigen (Einleit. 49).

Dieß vorausgesetzt, so mache man in irgend einer als horizontal betrachteten Ebene (Fig. XXV) den Winkel asb einer der gegebenen Seiten gleich, und nehme an, daß dieselbe, die zwei anderen Seiten nach asc und bsc' umgeklappt sein mögen. Es leuchtet ein, daß man den dreiseitigen Winkel wieder herstellen kann, indem man die eine dieser Seiten um sa , die andere um sb dreht, bis die Schenkel sc und sc' zusammenfallen. Man nehme auf den Seiten $sf = sf'$, und ziehe auf sa und sb die Perpendikel fgh und $f'g'h$, welche sich in h schneiden. Während der Drehung der zwei Seiten, beschreiben die Punkte f und f' um die Mittelpunkte g und g' Kreise, welche in Verticalebenen liegen, deren Tracen auf die feste Ebene asb , gh und $g'h$ sind; und kommt das Zusammenfallen der Schenkel sc und sc' zu Stande, so vereinigen sich diese Punkte in einem einzigen, welcher F heißen mag. Dann bilden die Geraden fg und $f'g'$ mit gh und $g'h$ Winkel, welche den Neigungen der Seitenflächen zur horizontalen Seite abs gleich sind.

Um diese Neigungen zu kennen, genügt es, die,

durch fg , $f'g'$ beschriebenen Verticalebenen auf diese horizontale Seite umzuklappen. Durch Drehung der ersten um gh , klappt sich der mit fg beschriebene Kreis auf einen, aus g mit dem Halbmesser gf beschriebenen Kreis fk . Anderer Seits, bemerke man, daß da der Punkt h zweien Verticalebenen gemein ist, der Durchschnitt dieser zwei Ebenen eine, in h errichtete Verticale sein muß; folglich klappt sich dieser Durchschnitt, durch Drehung um gh , auf das Perpendikel hk zu gh . Nun aber muß der Vereinigungspunkt K der Punkte f und f' im Raume in diesem Durchschnitte liegen; folglich klappt sich derselbe auf den Punkt k , den Durchschnittspunkt des Bogens fk mit dem Perpendikel hk ; und folglich wird, indem man kg zieht, der Winkel kgh die Neigung der Seiten asc , asb sein. Wird die durch $f'g'$ beschriebene Verticalebene um $g'h$ gedreht, so findet man durch ein ganz ähnliches Verfahren, den Winkel $k'g'h'$ welcher der Neigung der Seiten bsc' , asb gleich ist.

Den dritten Neigungswinkel könnte man dadurch finden, indem man auf die eine der Seiten asc' bsc' dieselben Constructionen anwendete, welche auf der Seite asb vollzogen wurden; aber man erhält ihn weit einfacher folgendermaßen. Man denke sich durch den Punkt F eine perpendikuläre Ebene zur dritten Kante; sie schneidet die zwei Seitenflächen in zwei Geraden, welche unter sich den gesuchten Neigungswinkel einschließen. Eine dieser Geraden ist auf fp perpendikulär zu sc umgeklappt, und die andere auf $f'q$ perpendikulär zu sc' . Es ist klar, daß die Durchschnittspunkte p und q dieser Geraden, mit den Schenkeln as und bs ihre Lagen nicht geändert haben; folglich wird man, durch das Ziehen der Geraden pq , auf der Seite asb die Trace der den unbekannten Winkel enthaltenden Ebene erhalten, und dreht man diese Ebene um pq , so kommt der Scheitel dieses Winkels in den Durchschnittspunkt m der, mit den Halbmessern pf und qf' beschriebenen Bogen zu liegen; folglich ist endlich der Winkel pmq dem dritten Neigungswinkels des dreiseitigen Winkels gleich.

Anmerkung. Bei diesem Verfahren sind mehrere Controlen bemerkenswerth.

1) Die Geraden hk und hk' müssen sich gleich sein, als Umklappungen der nämlichen Verticale.

2) Da die Linie sh die Projection der dritten Kante auf die Ebene asb , und pq die Trace einer zu dieser Kante perpendicularen Ebene ist, so folgt, dass sh perpendicular zu pq sein muss. Ist sh perpendicular zu pq , so muss, die durch den Punkt F der dritten Kante, zum Durchschnittspunkt n von sh und pq gezogene Gerade auch perpendicular zu pq sein; folglich wird diese Gerade, durch die Umklappung pqm , auf die Verlängerung sn zu liegen kommen; folglich muss der Punkt m in dieser Verlängerung liegen. Die Linie sh ist also perpendicular zu pq , und geht durch den Punkt m .

3) Verlängert man gh bis zum Durchschnitt i mit sb , so werden die Entfernungen if' und ik gleich sein müssen. Eben so, wenn man $g'h$ bis zum Durchschnitt i' mit sa verlängert, so wird man auch $i'f = i'k'$ erhalten.

43. Aufgabe XXVI. Aus den zwei Seiten und deren Neigungswinkel eines dreiseitigen Winkels, die dritte Seite und die zwei anderen Neigungswinkel zu finden.

Es seien (Fig. XXVI) asb und asc die zwei gegebenen Seiten, die eine neben der andern umgeklappt. Zieht man fgh perpendicular auf as , so sind die Linien gh und gf die Durchschnitte der zwei Seiten mit einer, im Punkte g perpendicular zur Kante as errichteten Ebene, und sie schliessen, in der wirklichen Lage dieser zwei Seiten, einen dem gegebenen Neigungswinkel gleichen Winkel ein. Klappt man die Ebene dieses Winkels um gh auf die Ebene asb um, dann bildet die Gerade gf mit gh den, dieser Neigung gleichen Winkel kgh . Ueberdies, ändert die Entfernung gf ihre Grösse nicht; wenn man daher $gk = gf$ nimmt, und kh perpendicular zu gh zieht, so wird h der Fusspunkt des, aus dem Punkte F der dritten Kante auf die Ebene asb gefällten Perpendikels sein, welcher in f und h umgeklappt ist. Denkt man sich, dass

diese letzte Kante um bs gedreht wird, um in die Ebene von asb zu gelangen; so ist es klar, daß der Punkt F irgend wohin nach f' , auf das Perpendikel $hg'f'$ zu bs kommen muß; und da derselbe in der nämlichen Entfernung vom Scheitel s , wie der Punkt f bleiben muß, so folgt, daß der Punkt f' bestimmt ist, und mithin ist es die dritte Seite bsf' auch. Aus den drei Seiten findet man vermittelst der vorigen Aufgabe, deren Neigungen.

Anmerkung. Durch Verlängerung von gh bis nach i , erhält man $if' = ik$.

44. Aufgabe XXVII. Aus zwei Seiten eines dreiseitigen Winkels, und dem, einer derselben gegenüberliegenden Neigungswinkel, die dritte Seite, und die zwei andern Neigungswinkel zu finden.

Es seien (Fig. XXVII) abs und asc die zwei gegebenen Seiten, und setzen wir, man kenne die, der Seite asc gegenüberliegende Neigung. Stellen wir uns nun den dreiseitigen Winkel im Raume vor, so wie er ist, schneiden ihn durch eine, zur Kante as perpendikläre Ebene, und suchen die Umklappung des, aus dem Durchschnitte hervorgehenden Dreiecks, auf die Ebene asb . Die Tracen gv , gf dieser Ebene auf den Seiten asb , asc , sind perpendikulär zu as , und die Entfernungen gi , gf , selbst stellen schon die wahren Größen zweier Seiten des erwähnten Dreieckes dar. Hieraus folgt, daß wenn man gi als die Basis dieses Dreieckes ansieht, der Scheitel sich in irgend einem Punkte des, aus g mit dem Halbmesser gf beschriebenen Halbkreises finden werde.

Die dritte Seite anlangend, so ist ihre Richtung durch den Durchschnitt der, zu as perpendikulären Ebene, mit jener der dritten Seite bestimmt; und da die Neigung dieser dritten Seite bekannt ist, so läßt sich leicht die Richtung dieses Durchschnitts finden. Ferner geht derselbe durch den Punkt i ; suchen wir daher einen zweiten Punkt. Zu diesem Zwecke, ziehe man go perpendikulär zu bs , und denke sich durch go eine, zur Seite asb perpendikuläre Ebene. Diese Ebene schneidet die dritte

Seite des dreiseitigen Winkels in einer Geraden, welche mit og einen, der gegebenen Neigung gleichen Winkel einschließt. Man kann daher sogleich in gom die Umklappung dieses Winkels erhalten; und wenn man gm perpendicular zu go zieht, so muß diese Gerade die wahre Gröfse des, in g zur Ebene asb errichteten, und von der Ebene der dritten Seite begränzten Perpendikels sein. Nun aber liegt dieses Perpendikel gänzlich in der Ebene des, gi zur Basis habenden Dreiecks, dessen Umklappung auf die Ebene asb gesucht wird; wenn sich daher dieses Dreieck um gi dreht, so schließt es sich in der Richtung von ga , bis auf die Entfernung $gn = gm$ an; zieht man folglich eine Gerade durch die Punkte i und n , so erhält man die Richtung der dritten Seite des Dreiecks.

Wenn die Gerade in den Halbkreis fpq in zwei Punkte p und q schneidet, wie in der Figur, so hat die Aufgabe zwei Auflösungen. Denn sobald man die Ebene des Kreises fpq in ihre ursprüngliche Lage zurückführt, und dann den Scheitel s mit den Punkten p und q verbindet, so ist es klar, daß man mit den gegebenen Stücken der Aufgabe zwei dreiseitige Winkel erhält. Betrachten wir jenen zuerst, welcher durch den Punkt p bestimmt ist. Die Gerade pi wird die Entfernung des Punktes i von einem Punkte der dritten Kante sein; aber die Entfernung des Scheitels s bis zu diesem Punkte der dritten Kante ist gleich sf ; sobald man daher die dritte Seite um bf umklappt, dann kommt dieser Punkt in den Durchschnitt p' der mit den Halbmessern ip und sf beschriebenen Bogen; und dann findet man durch das Ziehen von sp' , bsp' als dritte Seite. Betrachtet man den, durch den Punkt q bestimmten dreiseitigen Winkel und vollzieht dieselben Constructionen, so erhält man bsq' als dritte Seite.

Anmerkungen. Fällt man aus den Punkten p und q Perpendikel auf gi , und zieht hierauf durch ihre Fußpunkte Perpendikel zu sb , so müssen diese letzteren

Linien beziehentlich durch die Punkte p' und q' hindurch gehen.

Die Aufgabe bietet zwei Lösungen nur dann dar, wenn die Punkte p und q , beide nach *in* zu liegen. Fällt der Punkt q nach *in'* hin, so findet keine Lösung statt. Berührt der Halbkreis fpq *in*, so reduciren sich die zwei Auflösungen auf eine einzige. Begegnen sich endlich der Kreis und die Gerade nicht, so ist die Aufgabe unmöglich.

Zweite Abtheilung.

Krumme Oberflächen und Berührungsebenen.

Entstehung der Oberflächen.

45. Was immer für eine Oberfläche man betrachten mag, stets wird man in ihrer Beschreibung oder in ihrer Entstehung, oder in ihren Eigenschaften, die zu deren Bestimmung tauglichen Elemente zu suchen haben; dergestalt daß, sind diese Elemente einmal gegeben, man alle, auf diese Oberfläche bezüglichen Fragen zu beantworten im Stande ist. So ist also eine Ebene durch ihre Tracen bestimmt, und eine Kugel durch deren Mittelpunkt und Halbmesser.

Handelt es sich nur um die Bestimmung des Unterschied's einer Oberfläche von allen andern, so sieht man ein, daß die zu diesem Behufe geeigneten Elemente, auf unendlich mannigfaltige Art verschieden sein können. Es ist aber erforderlich, und diess ist eine wesentliche Bedingung, daß diese Elemente einer leichten Anwendung fähig seien, bei den Untersuchungen welchen die Ober-

fläche unterworfen werden soll. In dieser Hinsicht ist die Wahl selten schwierig; denn die Oberflächen, womit die descriptive Geometrie sich befaßt, sind immer durch ihre Entstehung bekannt, diese Entstehung selbst liefert die Elemente, welche jene auf die einfachste und zugleich für Constructionen auf die bequemste Art bestimmen.

46. Jede Oberfläche kann angesehen werden, als sei sie durch Bewegung einer Linie von beständiger oder veränderlicher Form entstanden. Demnach wird eine Ebene durch Fortgleitung einer sich selbst parallel bleibenden Geraden, längs einer Geraden beschrieben, oder durch perpendikuläre Umdrehung um eine feste Linie, welche sie beständig in demselben Punkte schneidet; in diesem Beispiel ändert die Erzeugende nicht ihre Form, sie bleibt stets eine gerade Linie. Die Kugel ist durch Umdrehung eines größten Kreises um einen Durchmesser entstanden, und hier behält die Erzeugende noch dieselbe Form; man kann aber auch die Kugel durch Bewegung eines Kreises erhalten, dergestalt daß seine Ebene perpendikulär zu demselben Durchmesser bleibt, daß sein Mittelpunkt stets in diesem Durchmesser ist, und daß sein Halbmesser sich nach einem angemessenen Gesetze ändert.

Im Allgemeinen kann man auf irgend einer Oberfläche eine erste Linie beliebig ziehen, dann annehmen, daß sich diese Linie bewegt, während sie ihre Form nach Erforderniß ändert, um so die Oberfläche zu erzeugen. Für die Anwendungen ist es wenig brauchbar, die Entstehung der Oberflächen aus einem so allgemeinen Gesichtspunkte aufzufassen, vielmehr diejenige, welche specieller jeder Gattung von Oberflächen zukommt, zu berücksichtigen.

Die Linie deren Bewegung eine Oberfläche erzeugt heißt die Erzeugende, Erzeugungslinie, — *generatrice* —. Eine Linie, sie sei gerade oder krumm, welche dazu dient, die Bewegung dieser Erzeugenden zu leiten, wird die Leitende, Leitlinie, Richt-

linie — *ligne directrice* — genannt. Bedient man sich einer Ebene um diese Bewegung zu leiten, so ist dieß eine Richtebene, Leitebene — *plan directeur* —. Wird eine Oberfläche angewendet, so ist es eine Richtoberfläche — *surface directrice* —.

Berührungsebene und Normale.

47. Eine Curve kann als Polygon von unendlich kleinen Seiten angesehen werden, deren Tangenten dann jene Geraden sind, welche man durch unbestimmte Verlängerung der Seiten erhält. Eben so läßt sich eine krumme Oberfläche mit einem Polyeder vergleichen, dessen Flächen unendlich klein sind, und eine Berührungsebene ist nichts Anderes, als eine unendlich gedachte Ebene, einer dieser Seitenflächen.

Um also eine klare Vorstellung von der Berührungsebene eines Punktes einer Oberfläche zu erhalten, muß man sich um diesen Punkt herum einen außerordentlich kleinen Theil dieser Oberfläche genommen denken; dieser Theil kann als in einer Ebene liegend betrachtet werden, und diese unbestimmt fortgesetzt gedachte Ebene ist die Berührungsebene.

48. Denken wir uns durch den Berührungspunkt noch so viel Linien auf der Oberfläche gezogen, und nehmen, ausgehend von diesem Punkte, unendlich kleine Theile dieser Linien an; so sind sie alle in der Berührungsebene gelegen. Anderer Seits aber können diese Theile als gerade Linien gedacht werden, welche unbestimmt verlängert zu Tangenten von, auf der Oberfläche gezogenen Linien werden, folglich hat jede dieser Tangenten ein unendlich kleines Stück seiner Richtung, in der Berührungsebene; folglich liegt sie gänzlich in ihr; d. h. die Berührungsebene einer Oberfläche enthält die, durch den Berührungspunkt gehenden Tangenten aller Linien, welche man durch diesen Punkt auf der Oberfläche ziehen kann.

49. Dieser Schluss folgt unmittelbar aus dem Begriffe des Unendlichen, worauf die Erklärungen der Tangente und der Berührungsebene beruhen; man kann sich desselben jedoch auf folgende Weise entledigen.

Zuvörderst ist zu erinnern, dafs wenn man eine, eine Curve in zwei Punkten schneidende Gerade zieht, und diese hierauf um einen derselben dreht, dergestalt dafs der andere sich ihm mehr und mehr nähert, und dann mit ihm zusammenfällt, so wird die Gerade eine bestimmte Lage annehmen, in welcher sie die *T a n g e n t e* heifst. Diefs vorausgesetzt, so ist zu untersuchen, ob nicht die, durch einen Punkt einer Oberfläche, für verschiedene, auf derselben in diesem Punkte sich schneidenden Linien, gehenden Tangenten, durchgängig in der nämlichen Ebene liegen; und diefs wird dann jene Ebene sein, welche man *Berührungsebene* zu nennen pflegt.

Um diesen Satz zu beweisen, wollen wir die Oberfläche durch Bewegung einer Linie entstanden, ansehen, und zu gröfserer Klarheit die Linie von unveränderlicher Form annehmen. Es sei M irgend ein Punkt der Oberfläche (Taf. II. Fig. 14), und AA' die durch diesen Punkt gehende Erzeugende; denken wir uns dieselbe in einer Lage GG' , wie immer benachbart von AA' , und nehmen an, dafs der Punkt N derjenige sei, welcher nach M gelangt, während derselbe die Bahn CC' auf der Oberfläche beschreibt. Noch sei MD irgend eine, durch den Punkt M auf der Oberfläche gezogene Curve, und P deren Durchschnitt mit der Erzeugenden GG' . Endlich mögen durch die, paarweise genommenen Punkte M , N , P , die Secanten MR , NS , MT geführt werden.

Denken wir uns nun, dafs sich die Erzeugende GG' der AA' nähert, und endlich mit AA' zusammenfällt; im Augenblicke des Zusammenfallens, werden die Punkte N und P sich mit dem Punkte M vereinigen, und jetzt werden die drei Secanten zu Tangenten dreier Curven CC' , AA' , MD . Nun aber giebt es, während die drei Secanten ihre Lagen verändern, stets eine Ebene, welche

sie alle drei enthält; in dem Augenblicke folglich, darin sie zu Tangenten werden, müssen sie noch in derselben Ebene enthalten sein.

Der vorige Beweis eignet sich auch für den Fall darin die Erzeugende GG' ihre Form ändert; aber dann ist derselbe einer Schwierigkeit unterworfen, die daraus entsteht, daß die Erklärung der Tangente an einer Curve erfordert, daß die Curve ihre Form behalte, indem die Secante deren Gränze die Tangente ist, um einen Punkt dieser Curve sich dreht. Wie dem auch sei, da wir in der Folge nur solche Oberflächen zu betrachten haben, deren Erzeugende von beständiger Form ist, so können wir als bewiesen annehmen, daß die Ebene der nach den Curven CC' und AA' geführten Tangenten die zu irgend einer Curve im Punkte M der Oberfläche geführte Tangente enthält; ein Schluss, welcher mit dem der vorigen Nummer genau übereinstimmt.

50. Dieser Satz ist von der größten Wichtigkeit, für die Untersuchung der Berührungsebenen denn, da zwei Gerade zur Bestimmung einer Ebene hinreichen, so folgt, daß um die Berührungsebene an einem gegebenen Punkte einer Oberfläche darzustellen, man die Tangenten bloß zu zwei in dieser Oberfläche gezogenen Linien zu führen, und eine Ebene durch diese Tangenten zu legen hat.

Unerwähnt könnte es bleiben, daß man immer auf der Oberfläche die zwei Linien zu wählen hat, deren Tangenten am leichtesten zu finden sind. Z. B. kann man durch den Berührungspunkt zwei gänzlich in der Oberfläche enthaltene Gerade ziehn, so wird man bemerken, daß diese Geraden sich selbst ihre Tangenten sind; was zur Folge hat, daß die Berührungsebene von diesen beiden Geraden bestimmt wird. Dieser Fall ist auch der, gewisser windschiefen Oberflächen, deren Eigenschaften später Nr. 64 bis 75 entwickelt werden sollen. Uebrigens wird man bald sehen, daß in jeder Gattung von Oberflächen die Berührungsebene besondere Eigenschaften besitzt, welche die Bestimmung derselben erleichtern.

51. Das, durch den Berührungspunkt zur Berührungsebene geführte Perpendikel heisst die Normale.

Verschiedene Arten der Oberflächen.

52. Es giebt Oberflächen, welche in den darstellenden Künsten häufigen Gebrauch finden, und denen eine besondere Aufmerksamkeit zu widmen ist. Nur von diesen soll hier die Rede sein, und wir wollen sie in drei Classen theilen, nämlich: in die developpabeln, oder entwickelbaren Oberflächen, in die Revolutionsoberflächen, oder Umdrehungsoberflächen und in die windschiefen Oberflächen.

53. Developpable Oberflächen. Sie werden von einer Geraden erzeugt, welche sich dergestalt bewegt, dass sie in jeder ihrer Lagen mit der unendlich nahe liegenden in dieselbe Ebene hineinfällt. Die Erzeugende wird stets als unbestimmt vorausgesetzt, wofern man nicht das Gegentheil anführt. Unter diesen Oberflächen, werden wir den Cylinder und den Kegel betrachten.

Der Cylinder wird durch eine Gerade erzeugt, welche sich parallel zu sich selbst bewegt, indem sie sich auf irgend eine Curve stützt, oder irgend einem Gesetze folgt. Aus dieser Entstehung folgt, dass eine, zu einer Erzeugenden parallele Ebene, diese Oberfläche nur in einer, oder in mehreren ihrer Erzeugenden schneiden kann.

Der Kegel wird von einer Geraden erzeugt, welche beständig durch einen festen Punkt oder Scheitel geht, und sich um diesen Punkt nach irgend einem Gesetze bewegt. Die beiden durch den Scheitel getrennten Theile eines Kegels werden Mäntel genannt. Es leuchtet ein, dass eine, durch den Scheitel gehende Ebene, im Allgemeinen den Kegel in einer oder in mehreren durch den Scheitel gehenden Geraden schneidet.

54. Um von den developpabeln Oberflächen überhaupt, eine Vorstellung zu haben, so wollen wir den Gegen-

stand von vorn herein verfolgen, und diejenige Oberfläche betrachten, welche entsteht, wenn man die Seiten eines Polygons $ABCD \dots$ (Fig. 15) wovon drei, beliebig auf einander folgende Seiten, nicht in der nämlichen Ebene liegen, unbestimmt verlängert. Diese Oberfläche, oder wenn man will, dieses Polyeder besteht aus den Flächen $PAQ, QPR, \dots$ welche nichts Anderes als Winkelstücke von Ebenen sind; und man kann sich sogar sämtliche Kanten als auf die andere Seite des Polygons verlängert denken, eine zweite polyedrische Oberfläche bildend, von der ersten durch das Polygon $ABCD \dots$ getrennt, ebenso wie es die Mäntel eines Kegels durch den Scheitel sind. Nehmen wir an, daß das Polygon in einer gegebenen Curve eingeschrieben sei, und vermehren allmählig die Anzahl seiner Seiten, so wird dadurch eine Reihe von Polyedern bestimmt, in welchen jede Kante mit der unmittelbar benachbarten in einer und derselben Ebene gelegen sein muß; es wird folglich die Gränze dieser Polyeder eine krumme Oberfläche derselben Natur, d. h. eine developpable Oberfläche sein.

Bemerken wir noch außerdem, daß beim Uebergang zu dieser Gränze, das Polygon mit dieser Curve zusammenfällt, und daß die Kanten des Polyeders Tangenten zu dieser Curve werden; folglich kann eine developpable Oberfläche von einer Geraden beschrieben werden, welche beständig Tangente zu einer Curve bleibt. Monge nennt diese Curve Fortrückungscurve — *arêt de rebroussement*. —

Der Cylinder und der Kegel entziehen sich dieser Entstehung, weil bei der einen die Erzeugenden parallel sind, und diese bei der andern sämtlich durch einen und denselben Punkt gehen.

55. Eine wohl zu beachtende, und durch ihre Benennung selbst ausgedrückte Eigenschaft der developpabeln Oberflächen, ist diese, daß man einen beliebigen Theil einer solchen Oberfläche stets ohne Risse und Falten ausbreiten kann. In der That, es genügt hierzu jede der

Elementarebenen, daraus dieser Theil der Oberfläche besteht, um die Erzeugende, welche sie von dem benachbarten Elemente sondert, zu drehen. Auf diese Weise kann man ein erstes Element in die Ebene des folgenden bringen, den Inbegriff dieser zwei Elemente auf die Ebene des dritten, und so fort.

56. Eine andere gleich bemerkenswerthe Eigenschaft der developpabeln Oberflächen, besteht darin, daß für jede Oberfläche dieser Classe, Cylinder, Kegel oder irgend eine, die Berührungsebene eine Erzeugende gänzlich enthält, und in jedem Punkte dieser Erzeugenden berührend zu dieser Oberfläche ist.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus der Entstehung der developpabeln Oberflächen, und läßt sich durch die schon (48) angewendeten Betrachtungen über das Unendliche leicht beweisen. Denn in diesen Oberflächen liegt eine gegebene Erzeugende stets mit der benachbarten in der nämlichen Ebene; nun aber leuchtet ein, daß diese allseitig unbestimmt verlängerte Ebene, zur Oberfläche in jedem Punkte der gegebenen Erzeugenden berührend ist.

Es ist dieß diejenige Eigenschaft, worauf wir uns beim Darstellen der Berührungsebenen an Cylinder und Kegel stützen.

57. **Revolutionsoberflächen.** Sie entstehen durch Umdrehung einer Linie um eine feste Axe.

Die, durch die Axe gehenden Ebenen heißen **Meridianebenen**, und deren Durchschnitte mit der Oberfläche **Meridiane**. Es leuchtet ein, daß alle Meridiane gleich sind, und jede aus zwei vollkommen gleichen Theilen besteht.

Es ist gleichfalls klar, daß die, durch verschiedene Punkte der Erzeugenden auf die Axe gefällten Perpendikel, Kreise beschreiben, deren Ebenen perpendikulär zur Axe sind, und welche ihre Mittelpunkte in der Axe haben. Man nennt diese Kreise **Parallelen** oder **Parallelkreise**, auch **Breitenkreise**.

58. Als Beispiele für Revolutionsoberflächen, beschränken wir uns auf die ohnehin bekannte Kugel, und die windschiefe Revolutionsoberfläche. Letztere ist jene, welche eine, um eine Axe sich drehende Gerade beschreibt, die mit dieser nicht in einerlei Ebene liegt. Die kürzeste Entfernung der Erzeugenden von der Axe ist eine, zu diesen beiden Linien perpendikuläre Gerade (Einleit. 39), und folglich beschreibt dieselbe um die Axe die Parallele des kleinsten Halbmessers. Diese Parallele heisst der Kehlkreis — *gorge, collier*. — Die Eigenschaften dieser Oberfläche werden in den Nummern 64 — 70 erklärt.

59. Bei jeder Revolutionsoberfläche, ist die Berührungsebene perpendikulär zu der, durch den Berührungspunkt gehenden Meridianebene.

Denn, die Berührungsebene muß die Tangente der, durch den Berührungspunkt gehenden Parallele enthalten (48); nun aber ist die Ebene dieser Parallele perpendikulär zur Meridianebene, und die Tangente dieser Parallele perpendikulär zum Halbmesser, im Durchschnitt der zwei Ebenen; folglich ist diese Tangente perpendikulär zur Meridianebene; folglich ist es die Berührungsebene auch.

60. Windschiefe Oberflächen. So nennt man diejenigen Oberflächen, welche durch eine gerade Linie entstanden, und nicht developpabel sind.

Alle durch eine Gerade beschriebenen, windschiefen oder developpabeln Oberflächen begreift man unter der allgemeinen Bemerkung der Regelflächen — *surfaces réglées*. —

61. Unter den verschiedenen Mitteln, die Bewegung einer Geraden Behufs der Entstehung einer windschiefen Oberfläche zu bestimmen, ist das einfachste sie zu nöthigen, beständig drei gegebene Linien oder Leitlinien zu schneiden. Um zu beweisen, daß dann wirklich die Oberfläche bestimmt ist, nehmen wir irgend einen Punkt

M der ersten Leitlinie A (Fig. 16), und denken uns ihn als Scheitel eines Kegels, welcher durch eine, sich auf die zweite B stützende Gerade entstanden ist. Dieser Kegel wird die dritte Leitlinie C in einem Punkte P schneiden; da die, durch die Punkte M und P gehende Gerade MP , gänzlich auf diesem Kegel liegt, so muß sie die Linie B in irgend einem Punkte N schneiden, und sich folglich den drei Leitlinien in den Punkten M, N, P anschließen. Denkt man sich nun alle Punkte der ersten Leitlinie allmählig als Scheitel verschiedener Kegel genommen, so ändert die, die drei Leitlinien schneidende Gerade MNP , stets ihre Lage, und beschreibt eine, daher vollkommen bestimmte Oberfläche.

Es könnte sich ereignen, daß die drei Leitlinien auf einer developpablen Oberfläche lägen. Dann würde die, an diesen Leitlinien gleitende Erzeugende, diese Oberfläche selbst beschreiben.

62. Wir merken folgende windschiefe Oberflächen an:

1) Das Hyperboloid mit einem Mantel, entstehend durch eine Gerade, welche sich längs dreier, nicht zu derselben Ebene parallelen Geraden bewegt. Die windschiefe Revolutionsoberfläche ist hiervon ein besonderer Fall (67, Anmerkung).

2) Das hyperbolische Paraboloid oder die windschiefe Ebene, erzeugt durch eine Gerade, welche sich längs zwei Geraden bewegt, und dabei stets parallel zu einer Richtebene bleibt. Es wird bewiesen werden (73, Anmerkung II), daß diese Oberfläche die nämliche ist, welche eine Gerade beschreibt, die an drei zu einer Ebene parallelen Geraden hingleitet. *)

*) Das Hyperboloid mit einem Mantel und das hyperbolische Paraboloid sind die einzigen windschiefen Oberflächen, deren Gleichungen vom zweiten Grade sind, aus diesem Grunde bezeichnet man sie oft mit der Benennung: windschiefe Oberflächen der zweiten Ordnung.

3) Der windschiefe Cylinder, erzeugt durch eine, stets zu einer Richtebene parallel bleibende Gerade, welche sich auf zwei beliebige Curven stützt.

4) Das Conoid, erzeugt durch eine, zu einer Richtebene parallel bleibende, und an einer Geraden und einer Curve hingleitenden Geraden.

63. Es sollen nun die Eigenschaften der windschiefen Oberflächen dargelegt werden. Der Leser jedoch, welcher sich mit dem leichteren Elementartheile der Theorie der Oberflächen begnügt, kann sogleich zu den Aufgaben (76) übergehen, und diejenigen unberücksichtigt lassen, welche sich auf die windschiefen Oberflächen beziehen.

Eigenschaften der windschiefen Revolutionsoberfläche.

64. **Lehrsatz** (Fig. 17). Die Erzeugenden der windschiefen Revolutionsoberfläche projectiren sich in der Ebene des Kehlkreises als Tangenten desselben.

Denken wir uns durch irgend einen Punkt A des Kehlkreises eine Erzeugende AG und eine Parallele AD zur Axe OZ . Sei O der Mittelpunkt des Kehlkreises; der zu den Linien OZ und AG perpendikuläre Halbmesser OA , muß perpendikulär zur Ebene DAG sein, und folglich auch zur Trace AR dieser Ebene, in der Ebene des Kehlkreises. Nun aber ist AR offenbar die Projection der Erzeugenden AG ; folglich berührt diese Projection den Kehlkreis.

65. **Lehrsatz** (Fig. 18). Man kann durch jeden Punkt der Oberfläche zwei Gerade ziehen, welche sich dieser Oberfläche in ihrer ganzen Ausdehnung anschließen.

Es sei OZ die Axe der Oberfläche, OA der Halbmesser des Kehlkreises, AG die Erzeugende, und AD eine Parallele zur Axe. Da die Ebene DAG perpendikulär zu OA ist, so ist sie es auch zur Meridianebene

ZOA , und die Trace AR der Ebene DAG auf der Ebene des Kehlkreises berührend zu demselben; wie man dieß im vorigen Lehrsatz ersah. Nun mache man in der Ebene DAG den Winkel $DAH = DAG$; dann wird behauptet, daß die Linie AH während ihrer Umdrehung um die Axe, dieselbe Oberfläche wie AG beschreibt.

Zum Beweis führe man irgend eine Ebene perpendicular zur Axe, welche diese in L schneidet, die Linien AG , AD , AH in G , D , H und die Ebene GAH in der Geraden GDH ; ziehe die Verbindenden LG , LD , LH . Die Dreiecke ADG , ADH sind rechtwinklig bei D , der Winkel $DAG = DAH$, und die Seite AD gemeinschaftlich; folglich $DG = DH$. Mithin sind die Dreiecke DGL , DHL gleich, da sie DL gemein, $DG = DH$ und den rechten Winkel $GDL = HDL$ haben; folglich $LG = LH$. Hieraus schließt man, daß der Punkt H denselben Kreis wie der Punkt G beschreibt, d. h. daß die auf den Geraden AG und AH , gleichweit vom Kehlkreis entfernten Punkte die nämliche Parallele beschreiben. Folglich erzeugt diese Gerade genau dieselbe Oberfläche; folglich kann man durch jeden Punkt dieser Oberfläche zwei Gerade ziehen, welche sich derselben vollkommen anschließen.

Zusatz. Man hat daher an der Oberfläche zwei Systeme der Erzeugenden zu unterscheiden. Das eine umfaßt die verschiedenen Lagen der Geraden AG , und das andere jene der Geraden AH .

66. **Lehrsatz** (Fig. 17). Der Mittelpunkt des Kehlkreises ist zugleich der Mittelpunkt der Oberfläche; d. h. er theilt alle, durch ihn hindurch gehenden, und von der Oberfläche begrenzten Geraden, in zwei gleiche Theile.

Gelangten durch die Drehung, der Punkt A nach A' zum anderen Ende des Durchmesser AA' , und die Linien AR , AG , AD , AH nach $A'R'$, $A'G'$, $A'D'$, $A'H'$, so leuchtet ein, daß die Tangenten AR und $A'R'$, so wie die Ebenen GAH und $G'A'H'$ parallel sind. Folglich

müssen die, die gleichen und gleich gerichteten Winkel GAR und die, $H'A'R'$ bildenden Geraden AG und $A'H'$ parallel unter sich sein. Zieht man folglich durch den Punkt O und durch irgend einen Punkt M von AG eine Gerade, so wird sie $A'H'$ in einem Punkte N schneiden, und man erhält $ON = OM$, dem Sinne des Lehrsatzes gemäß.

67. **Lehrsatz** (Fig. 18). Zwei Erzeugende verschiedener Systeme liegen stets in der nämlichen Ebene; aber zwei Erzeugende desselben Systems niemals. Drei der letzteren wie immer genommen, können nicht auch parallel zur nämlichen Ebene sein.

Nehmen wir an, daß durch Drehung die Linien AD , AG , AH , welche die vorige Bedeutung beibehalten, nach $A'D'$, $A'G'$, $A'H'$, und die Tangente AR nach $A'R'$ gelangt sind. Die Erzeugenden AG , $A'G'$ gehören zum ersten System, und AH , $A'H'$ zum zweiten. Durch den Durchschnittspunkt der zwei Tangenten ziehen wir KRK parallel zur Axe OZ , diese Parallele muß der Durchschnitt der Ebenen GAH , $G'A'H'$ sein. Da die Winkel GAR , $H'A'R'$ gleich sind, und $AR = A'R$, so ist leicht einzusehen, daß die Geraden AG , $A'H'$ RK im nämlichen Punkte schneiden müssen; folglich liegen zwei Erzeugende der verschiedenen Systeme stets in der nämlichen Ebene.

Berücksichtigen wir nun die Geraden AG und $A'G'$, schnitten sich dieselben, so könnte dies nur in der Linie KK' statt finden; da nun der Winkel GAR und $G'A'R'$ gleich sind, so ist es klar, daß die eine der Erzeugenden KK' oberhalb des Punktes A , und die andere unterhalb desselben schneidet; folglich schneiden sie sich nicht. Ueberdies können die Linien AG , $A'G'$ nicht parallel sein; denn wären sie es, so müßten es die Ebenen GAD , $G'A'D'$ auch sein, und $A'R'$ wäre parallel zu AR . Aber dann würden AG und $A'G'$ eine Stellung wie in Fig. 17 haben; die Linien $A'G'$ und $A'H'$ wären folglich beide parallel zu AG , was unmöglich ist. Folg-

lich sind zwei Erzeugende desselben Systems niemals in derselben Ebene enthalten.

Nun nehme man beliebig drei Erzeugende desselben System's, und führe zu denselben Parallelen durch einen Punkt der Axe. Da in demselben System die Erzeugenden nicht parallel unter sich sind, so müssen diese drei Parallelen verschiedene Linien sein; und da alle diese Erzeugenden zur Axe gleich geneigt sind, so schliessen diese Parallelen mit der Axe gleiche Winkel ein. Hieraus läßt sich leicht folgern, daß dieselben die Ebene des Krehlkreises in drei, in einem Kreisumfange gelegenen Punkten schneiden, und daß sie folglich nicht in der nämlichen Ebene liegen; nun aber müßte dies statt finden, sollten die drei Erzeugenden parallel zu einer Ebene sein. Folglich können drei Erzeugende desselben Systems nicht parallel zu derselben Ebene sein.

Zusatz. Es leuchtet ein, daß die Oberfläche durch Fortgleitung einer Geraden auf drei, in demselben Systeme beliebig genommenen Erzeugenden beschrieben werden kann, und daß man sie als drei feste Richtlinien ansehen könne; folglich ist die windschiefe Revolutionsoberfläche ein besonderer Fall des Hyperboloids mit einem Mantel (62).

68. Lehrsatz (Fig. 19). Führt man durch den Mittelpunkt der Oberfläche eine Parallele zu einer Erzeugenden, und dreht diese zwei Linien, während sie stets parallel bleiben, zugleich um die Axe, so beschreibt die erste einen geraden Kegel, welcher asymptot zu der, von der zweiten beschriebenen windschiefen Oberfläche ist; d. h. der Kegel kann dieser Oberfläche beliebig genähert werden, ohne sie jemals zu erreichen.

Der Satz beschränkt sich darauf, zu zeigen, daß wenn man die zwei Oberflächen durch, zur Axe perpendikuläre Ebenen schneidet, die Differenz der Halbmesser der, durch den nämlichen Schnitt entstandenen, concen-

trischen Kreise, zwar beliebig klein, niemals aber Null werden kann.

Sei AG irgend eine Erzeugende der Oberfläche, und OL ihre Parallele auf dem Kegel. Man führe perpendicular zur Axe OZ eine Ebene, welche diese Axe in P , die Linie AG in M und die Linie OL in N schneidet; es ist klar, dass diese Ebene die zwei Oberflächen in Kreisen schneidet, deren Halbmesser PM und PN sind. Wird AR berührend zum Kehlkreis gezogen, so weiß man nach den vorigen Lehrsätzen, dass die Ebene GAR perpendicular zur Ebene des Kehlkreises ist; zieht man folglich MR perpendicular zu AR , so muss diese Linie auch perpendicular zur Ebene des Kehlkreises, und parallel zu OZ sein. Daraus ergiebt sich $MR = OP$ und Winkel $AMR = NOP$; folglich sind die rechtwinkligen Dreiecke MAR , ONP gleich; folglich $AR = PN$.

Nun giebt das rechtwinklige Dreieck OAR $\overline{OR}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{OA}^2$; folglich $\overline{PM}^2 = \overline{PN}^2 + \overline{OA}^2$; folglich wenn man $OA = a$, $PM = R$, $PN = R'$ setzt, so ist

$$R^2 - R'^2 = a^2$$

Aber $R^2 - R'^2 = (R + R')(R - R')$; folglich

$$R - R' = \frac{a^2}{R + R'}$$

Nun aber werden, indem man die Durchschnitte mehr und mehr vom Kehlkreis entfernt, die Halbmesser R und R' gröfser und gröfser, und sie können sogar jede Gränze überschreiten; folglich kann der vorangehende Werth $R - R'$ beliebig klein werden, ohne jemals Null zu erreichen. Was zu beweisen war.

Anmerkung. Einleuchtend ist es, dass jede Erzeugende der windschiefen Revolutionsoberfläche ihre Parallele auf dem asymptoten Kegel hat, *et. v. v.*; so, dass man diesen Kegel als den Ort der Geraden ansehen kann, welche man durch Uebertragung aller der Erzeugenden des einen und des andern Systems auf den Mittelpunkt der windschiefen Oberfläche erhält.

69. **Lehrsatz** (Fig. 20). Eine, durch die Axe einer windschiefen Revolutionsoberfläche geführte Ebene, schneidet diese Oberfläche in einer Hyperbel.

Es sei $DEE'D'$ eine, durch die Axe XX' gehende, den Kehlkreis im Durchmesser YY' schneidende Ebene, M irgend ein Punkt der Curve des Durchschnitts dieser Ebene mit der Oberfläche, und MA die durch diesen Punkt gehende, und den Kehlkreis in A schneidende Erzeugende. Man fälle die Perpendikel MP und MQ auf OX und OY , ziehe ferner AQ und OA ; der Winkel MAQ wird dem constanten Winkel gleich sein, welchen die Erzeugende mit der Ebene des Kehlkreises bildet. Man setze Winkel $MAQ = \alpha$, $OA = a$, $OP = x$, $MP = y$; das Dreieck AMQ giebt zuerst $AQ = MQ \times \cot \alpha = x \cot \alpha$; und hierauf erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck OAQ den Werth von OQ^2 oder y^2 , nämlich:

$$[1] \quad y^2 = x^2 \cot^2 \alpha + a^2$$

die Gleichung einer Hyperbel.

Anmerkung I. Die Asymptoten dieser Hyperbel haben zu ihren Gleichungen

$$y = \pm x \cot \alpha;$$

folglich schliessen sie mit der Axe XX' denselben Winkel ein, wie die Erzeugenden der Oberfläche, und folglich liegen sie auf dem asymptoten Kegel, dessen Benennung sich hierdurch aufs Neue rechtfertiget.

Anmerkung II. Es ist klar, dass diese Oberfläche durch Umdrehung der Hyperbel um ihre zweite Axe XX' noch zu erzeugen wäre; aus diesem Grunde bezeichnet man dieselbe mit der Benennung **Revolutionshyperboloid** mit einem Mantel. Durch Umdrehung der Hyperbel um ihre erste Axe YY' würde man ein Hyperboloid mit zwei Mänteln erhalten.

Anmerkung III. Denken wir uns eine andere windschiefe Revolutionsoberfläche mit derselben Axe OX der vorigen, deren Mittelpunkt aber in einer Höhe $OH = h$ über dem Punkte O liege. Es sei a' der Halbmesser ihres

Kehlkreises, und α' der Winkel ihrer Erzeugenden mit der Kehlkreisebene. Um den, auf die nämlichen Axen OX und OY bezogenen Durchschnitt dieser neuen Oberfläche, mit der Ebene XOY zu erhalten, so genügt es, in der Gleichung [1], a durch a' , α durch α' , und x durch $x - h$ zu ersetzen. Auf diese Weise hat man

$$[2] \quad y^2 = (x - h)^2 \cot^2 \alpha' + a'^2.$$

Es leuchtet ein, daß sich diese zwei Oberflächen nur in Kreisen schneiden können, deren Ebenen perpendicular zur Axe OX sind, und daß diese Ebenen die Axe OX in Höhen schneiden, welche denen der Durchschnittspunkte der, durch die Gleichungen [1] und [2] dargestellten zwei Hyperbeln genau gleich sind. Um diese Höhen zu erhalten genügt es folglich y in den zwei Gleichungen auszuscheiden, und die Werthe für x der dadurch entstehenden Gleichung zu ermitteln, es ist dieselbe

$$[3] \quad (x - h)^2 \cot^2 \alpha' - x^2 \cot^2 \alpha + a'^2 - a^2 = 0.$$

Nehmen wir nun $a' > a$, und setzen in dieser letzten Gleichung, $a^2 - a^2$ oder Null an Statt a^2 und $a'^2 - a^2$ an Statt a'^2 , so bleibt diese Gleichung die nämliche. Nun aber reducirt sich die erste windschiefe Oberfläche durch die Veränderung von a^2 in $a^2 - a^2$ auf ihren asymptoten Kegel; und durch die Veränderung von a'^2 in $a'^2 - a^2$, geht die zweite in eine andere windschiefe Oberfläche über, welche nur durch ihren Kehlkreis abweicht, der zum Halbmesser $\sqrt{a'^2 - a^2}$ hat, ein leicht geometrisch zu findender Werth. Man ersieht folglich hieraus, wie die Construction der gemeinschaftlichen Kreise zweier, einerlei Axe habenden windschiefen Revolutionsoberflächen, auf den einfacheren Fall, wo die eine der zwei Oberflächen ein Kegel wäre, zurückgeführt werden kann.

Diese Bemerkung dient (141) den Durchschnitt einer Geraden mit einer windschiefen Revolutionsoberfläche darzustellen.

70. Lehrsatz (Fig. 21). Beim Durchschneiden der windschiefen Revolutionsoberfläche

durch beliebige Ebenen, kann man Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln erhalten.

Es sei BY die Trace irgend einer Ebene in der des Kehlkreises; man fälle aus dem Mittelpunkte der Oberfläche das Perpendikel OB auf BY , und führe eine Ebene durch OB und durch die Axe OZ der Oberfläche. Diese Ebene wird perpendikulär zur schneidenden Ebene sein, und sie in einer zu BY perpendikulären Geraden BX schneiden. Es sei M ein beliebiger Punkt der Curve, welche aus dem Durchschnitt mit dem Hyperboloid hervorgeht; man ziehe die Ordinate MP perpendikulär zu BX , und setze $BP = x$, $MP = y$. OA sei der Halbmesser des Kehlkreises, und MAQ der Winkel einer beliebigen Erzeugenden mit der Ebene des Kehlkreises, $OA = a$, $MAQ = \alpha$. Um endlich die Lage der schneidenden Ebene festzusetzen, werde die Entfernung $OB = b$ und der Winkel $OBX = \beta$ genommen.

Es kommt darauf an, eine Beziehung unter den Coordinaten x und y zu erlangen. Zu diesem Zwecke, nehmen wir an, daß die, durch den Punkt M gehende Erzeugende die Gerade MA sei, welche den Kehlkreis in A schneidet. Man ziehe AQ berührend zum Kehlkreis, MQ perpendikulär zu AQ , und PR perpendikulär zu BO , ferner OA , OQ , QR . Die Figur $MPRQ$ wird ein Rechteck sein, und man hat $PR = MQ$, $QR = MP = y$.

Das Dreieck OQR ist bei R rechtwinklig, und giebt $\overline{QR}^2$ oder $y^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{OR}^2$. Nun aber giebt das rechtwinklige Dreieck OAQ $\overline{OQ}^2 = \overline{AQ}^2 + a^2$; folglich

$$y^2 = \overline{AQ}^2 - \overline{OR}^2 + a^2.$$

Im Dreiecke BPR ist die Hypothenuse $BP = x$ und der Winkel $PBR = \beta$; folglich $MQ = PR = x \cdot \sin\beta$. Daher giebt das rechtwinklige Dreieck MAQ , darin der Winkel MAQ gleich α ist:

$$AQ = MQ \times \cot\alpha = x \cdot \sin\beta \cot\alpha.$$

Aus demselben Dreiecke BPR folgt $BR = x \cdot \cos\beta$, und daraus

$$OR = BR - BO = x \cos\beta - b,$$

Substituirt man diese Werthe von AQ und OR in den Ausdruck für y^2 , so ergiebt sich

$$y^2 = x^2 \sin^2 \beta \cot^2 \alpha - (x \cos \beta - b)^2 + a^2 \\ = (\sin^2 \beta \cot^2 \alpha - \cos^2 \beta) x^2 + 2 b x \cos \beta + a^2 - b^2.$$

Vermittelst der bekannten Beziehungen

$$\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta, \cot^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

kann man den Werth für y^2 in folgenden umformen:

$$[4] \quad y^2 = \left(\frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) x^2 + 2 b \cos \beta \cdot x + a^2 - b^2;$$

und dies ist die Gleichung der Durchschnittscurve der windstiefen Oberfläche durch irgend eine Ebene.

Es ist erlaubt anzunehmen, daß α und β spitze Winkel sind, und dann leicht, einzusehen, daß diese Gleichung eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel darstellt, je nachdem man $\beta < \alpha$, $\beta = \alpha$ oder $\beta > \alpha$ nimmt; denn, im ersten Fall ist der Multiplicator von x^2 negativ, im zweiten Null und im dritten positiv.

Anmerkung I. Setzt man $a = 0$, so wird der Halbmesser OA Null, und das Hyperboloid verwandelt sich in seinen asymptoten Kegel. Nach dieser Voraussetzung wird aus der Gleichung [4]

$$[5] \quad y^2 = \left(\frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) x^2 + 2 b \cos \beta \cdot x - b^2;$$

und da sich der Coefficient von x^2 nicht ändert, so folgt man, daß die Durchschnitte der nämlichen Ebene mit dem Hyperboloid und dem asymptoten Kegel Curven derselben Art sind.

Anmerkung II. Führt man die schneidende Ebene parallel zu sich selbst durch den Scheitel des Kegels, und setzt deshalb $b = 0$, so beschränkt sich die Gleichung [5] auf

$$y^2 = \left(\frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) x^2.$$

Dieselbe giebt einen einzigen Punkt, sobald [4] eine Ellipse, eine Gerade wenn die Gleichung [4] eine Para-

bel darstellt; und zwei sich schneidende Gerade, für den Fall, daß die Gleichung [4] eine Hyperbel vergegenwärtigt. Um daher zu beurtheilen, in wie fern ein Schnitt des Hyperboloids eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel ist, so reicht es hin zu untersuchen, ob eine durch den Mittelpunkt gehende parallele Ebene, den asymptoten Kegel in einem einzigen Punkte, in einer Geraden, oder in zwei Geraden schneidet. Im letzten Falle ist zu bemerken, daß die zwei Geraden, Parallelen zu den Asymptoten der Hyperbel sind.

Anmerkung III. Der Fall wobei die windschiefe Oberfläche von einer, durch die Axe gehenden Ebene geschnitten wird, ist in der Gleichung [4] enthalten. Um sie abzuleiten, muß man annehmen, daß der Punkt B nach O gekommen ist, und die Linie BX mit OZ zusammen fällt, d. h. es ist $b=0$, und $\beta=90^\circ$ zu machen. Denn dann wird man auf die Gleichung [1], $y^2 = x^2 \cot^2 \alpha + a^2$ zurückkommen.

Vom Hyperboloid mit einem Mantel und dem hyperbolischen Paraboloid.

71. Lehrsatz. Das Hyperboloid mit einem Mantel kann auf zweierlei Weise durch die Bewegung einer Geraden erzeugt werden.

Nach der Erklärung (62) entsteht diese Oberfläche durch eine Gerade, welche an drei festen, nicht zu der nämlichen Ebene parallelen Geraden hingleitet. Bezeichnen wir durch A, B, C diese drei Leitlinien, und nehmen an, daß drei beliebige Erzeugende a, b, c der Oberfläche genommen seien, um die Bewegung einer beweglichen Geraden zu leiten. Der zu beweisende Satz besteht nun darin, daß die neue, so beschriebene Oberfläche mit der gegebenen Oberfläche identisch ist; und dieß Alles beschränkt sich darauf zu zeigen, daß eine, auf der einen der Oberflächen beliebig genommene Erzeugende, in jedem ihrer Punkte mit einer Erzeugenden der anderen Oberfläche zusammen fällt; denn alsdann wird

es einleuchten, daß dieselbe ganz in dieser letzten Oberfläche liegt. Wir stellen daher folgenden Hülffssatz auf.

Es mögen, in einer Ebene, beliebig viele, durch denselben Punkt A gehende Gerade gegeben sein (Fig. 22). Man schneide dieselben durch eine Gerade CC' ; ziehe durch die Durchschnittspunkte $E, E', E'', \dots$ Gerade zu irgend einem, inner- oder auferhalb der Ebene der gegebenen Geraden, liegenden Punkte B ; ziehe ferner zwei Transversalen NN'', PP'' , dergestalt, daß $NN' : PP' :: N'N'' : P'P''$. Es wird behauptet, daß man folgende Reihe gleicher Verhältnisse erhält:

$$[1] \quad NN' : PP' :: N'N'' : P'P'' :: N''N''' : P''P''', \text{ etc.}$$

Parallel zur Transversale NN'' ziehe man die Gerade AC , welche CC' in C schneidet, und vereinige B und C . Verlängere NN'' bis zu ihrem Durchschnitt D mit derselben Geraden CC' , und führe parallel zu BC die Gerade DQ , welche die Linien $BE, BE', BE'', \dots$ in $Q, Q', Q'' \dots$ schneidet. Endlich ziehe man $AB, NQ, N'Q', \dots$

Wegen den Parallelen DN und CA , DQ und CB , hat man $ED : DC :: EN : NA :: EQ : OB$; folglich ist NQ parallel zu AB . Eine ähnliche Schlussfolge zeigt, daß $N'Q', N''Q'', \dots$ auch parallel zu AB sind.

Da die Geraden $NQ, N'Q', \dots$ parallel sind, so erhält man folgende Reihe gleicher Verhältnisse

$$[2] \quad NN' : QQ' :: N'N'' : Q'Q'', N''N''' : Q''Q''', \text{ etc.}$$

Vermöge der Voraussetzung hat man aber $NN' : PP' :: N'N'' : P'P''$; folglich $PP' : QQ' :: P'P'' : Q'Q''$; folglich ist die Gerade QQ'' parallel zu PP'' , und mithin erhält man:

$$[3] \quad PP' : QQ' :: P'P'' : Q'Q'' :: P''P''' : Q''Q''' \text{ etc.}$$

Durch Vergleichung der Reihen [2] und [3] ergibt sich die zu beweisende Reihe [1].

Gehen wir jetzt zum aufgestellten Lehrsatz über. Es mögen (Fig. 23) AA', BB', CC' die drei Leitlinien des

Hyperboloids, und ab' , $a'b'$, $a''b''$ drei beliebige Erzeugende sein, welche die Leitlinien in den Punkten a , b , c , a' , b' , c' , a'' , b'' , c'' schneiden. Denken wir uns die drei Linien ab , $a'b'$, $a''b''$ als die Leitlinien einer zweiten windschiefen Oberfläche, und sei mm' eine Gerade, welche jene in m , m' , m'' schneidet, so wird die Gerade mm' eine Erzeugende dieser Oberfläche sein. Wir wollen beliebig einen Punkt o auf mm' nehmen, durch diesen Punkt und durch die Linie AA' eine Ebene $Ab'''c'''$ führen, welche die Linien BB' und CC' in den Punkten b''' und c''' schneidet, ferner die Gerade $b'''c'''$ ziehen. Diese Gerade wird AA' in irgend einem Punkte a''' schneiden, und folglich eine Erzeugende der ersten Oberfläche sein; nun aber soll gezeigt werden, daß dieselbe durch den Punkt o geht.

Durch die Gerade CC' führe man die zwei Ebenen BCC' , ACC' , die eine parallel zu AA' und BB' in B , die andere parallel zu BB' und AA' in A schneidend; ziehe ferner die Geraden Ac , Ac' , Ac'' , Ac''' , Bc , Bc' , Bc'' , Bc''' . Durch die drei Punkte m , m' , m'' ziehe man Parallelen zur Geraden AA' ; da diese in den Ebenen Aac , $Aa'c'$, $Aa''c''$ liegen, und die Linie $mm'm''$ gerad ist, so leuchtet ein, daß jene die Linien Ac , Ac' , Ac'' in drei Punkten n , n' , n'' schneiden, welche auch in einer geraden Linie enthalten sind. Durch dieselben Punkte m , m' , m'' ziehe man noch Parallelen zu BB' , welche die Linien Bc , Bc' , Bc'' in den Punkten p , p' , p'' auch in einer geraden Linie schneiden. Man denke sich nun die Ebenen nmp , $n'm'p'$, $n''m''p''$, welche CC' in q , q' , q'' schneiden, und die Parallelogramme $mnqp$, $m'n'q'p'$, $m''n''q''p''$ bestimmen. Es sei n''' der Durchschnittspunkt von nn' mit Ac''' , und p''' derjenige von pp' mit Bc''' ; man ziehe $n'''q'''$ parallel zu nq , und die verbindende $p'''q'''$.

Nach gehörigem Auffassen dieser Construction, geben diese Parallelen sofort $mm' : m'm'' : : nn' : n'n'' : : pp' : p'p''$; folglich hat man vermöge des Hülfsatzes:

$$nn' : n'n'' : n''n''' : : pp' : p'p'' : p''p'''.$$

Aber wegen den Parallelen $n'q'$, $n''q''$, $n'''q'''$ ist

$$n'n'' : n''n''' : : q'q'' : q''q''';$$

folglich hat man auch

$$p'p'' : p''p''' : : q'q'' : q''q''';$$

folglich ist $p'''q'''$ parallel zu $p''q''$.

Man vollende das Parallelogramm $n'''q'''p'''m'''$ (man wird sogleich sehen weswegen die Buchstaben o und m''' an demselben Punkte stehen). Da die Seite $m'''n'''$ parallel zu mn ist, so wird sie in der Ebene der Linien mm' , nn' liegen; und da die Seite $m'''p'''$ parallel zu mp , so liegt sie in der Ebene der Linien mm' , pp' ; folglich ist der Punkt m''' zweien Ebenen gemein. Nun aber ist die Gerade mm' der Durchschnitt dieser Ebenen; folglich liegt der Punkt m''' in der Linie mm' . Die Linien $m'''n'''$ und $m'''p'''$ sind auch beziehentlich in den Ebenen $Ab'''c'''$ und $Bb'''c'''$, welche sich in $b'''c'''$ schneiden; folglich gehört dieser Punkt auch zu diesem Durchschnitte; folglich ist er den Geraden mm' und $b'''c'''$ gemeinschaftlich.

Vermöge der Construction schneidet die Ebene $Ab'''c'''$ die Gerade mm' im Punkte o ; folglich fallen die Punkte o und m''' zusammen. Folglich müssen alle Punkte der einen Erzeugenden, auf einer der windschiefen Oberflächen genommen, auch zur anderen Oberfläche gehören, was darauf hinauskommt zu sagen, dafs diese zwei Oberflächen nur eine einzige ausmachen.

Anmerkung I. Es sind also zwei ganz verschiedene Systeme von Erzeugenden an dem Hyperboloid zu unterscheiden; und nach dem so eben entwickelten Beweise ist es so leicht einzusehen, dafs zwei Erzeugende verschiedener Systeme stets in der nämlichen Ebene enthalten sind. Aber sie sind es niemals, sobald sie zu demselben Systeme gehören; denn, gesetzt sie wären in derselben Ebene, da sie durch alle Erzeugenden des anderen Systems geschnitten werden, so wären sie auch mit ihnen in dieser Ebene, und die Oberfläche würde eben sein; folglich wären die drei geraden Leitlinien der Oberfläche in der nämlichen Ebene, was gegen die Er-

klärung des Hyperboloids ist (62). Drei Erzeugende des nämlichen Systems können auch nicht parallel zu einer Ebene sein; denn, fänd' dieß Statt, so würde die Oberfläche ein Paraboloid sein. Man sehe die Anmerkung II der Nummer 73.

Anmerkung II. Sind die Leitlinien AA' , BB' , CB' parallel zu einer Ebene, ein Fall in welchem die Oberfläche, wie wir so eben sahen, zu einem Paraboloid wird, so gehen die zwei durch CC' beziehentlich parallel zu den Geraden AA' und BB' geführten Ebenen, in eine einzige über, und der vorige Beweis findet nicht mehr Statt. Inzwischen wird man sogleich (73) sehen, daß dann auch der Lehrsatz noch besteht.

72. Lehrsatz. Mit den drei Leitlinien eines Hyperboloids mit einem Mantel, kann man ein Parallelepipedon darstellen, dessen drei Kanten in diesen Leitlinien liegen; und der Mittelpunkt dieses Parallelepipedons ist auch derjenige des Hyperboloids.

Bemerken wir zuvor, daß sobald zwei, nicht in der nämlichen Ebene liegende Gerade gegeben sind, man stets durch eine jede derselben eine parallele Ebene zur andern führen kann, und daß die zwei also bestimmten Ebenen parallel unter sich sind. Nun ist es klar, daß man durch jede der drei Leitlinien, zwei Ebenen beziehentlich parallel zu zwei anderen führen kann, und daß man auf diese Weise sechs je zwei und zwei parallele Ebenen erhält, welche ein Parallelepipedon bilden. Die Leitlinien sind Kanten des Parallelepipedons, denn jede derselben ist zweien dieser Ebenen gemeinschaftlich.

Es mögen (Fig. 24) AA' , BB' , CC' die drei Leitlinien sein, mit welchen man das Parallelepipedon dargestellt hat. Die gegenüberliegenden Kanten BC' , CA' , AB' sind die Erzeugenden des Hyperboloids; denn AB' z. B. schneidet die drei Leitlinien, nämlich AA' in A , BB' in B' , und CC' im Unendlichen. Nach dem vorigen Lehrsatze, kann man folglich diese drei Kanten als Leit-

linien des Hyperboloids nehmen. Man denke sich eine beliebige Erzeugende LM , welche die Leitlinien der ersten Art in L, M, N schneidet, und nehme auf denen der zweiten Art $BL' = A'L, CM' = B'M, B'N' = CN$; so wird behauptet, dass die Punkte L', M', N' in einer geraden Linie liegen. Da die Linie BL' gleich und parallel zu $A'L$ ist, so halbiren sich die Geraden $A'B$ und LL' in ihrem Durchschnitt; folglich ist der Punkt O , die Mitte der Diagonale AB , auch die Mitte von LL' . Da eben so AM' gleich und parallel zu BM ist, so ist die Mitte der Geraden MM' auch im Punkte O . Indem man endlich die Diagonale $B'C$ zieht, und berücksichtigt, dass $B'N'$ gleich CN ist, so wird man sehen, dass die Gerade NN' auch ihren Mittelpunkt in O hat. Nun aber schliesst man daraus, weil die Linien LL', MM', NN' ihre Mitte in O haben, dass die Gerade $L'M'$ parallel zu LM , und die Gerade $L'N'$ parallel zu LN ist; folglich ist die Linie $M'L'N'$ eine parallele Gerade zu MLN .

Jetzt wollen wir annehmen, dass die Erzeugende LM durch irgend einen Punkt P des Hyperboloids gezogen sei, und PO ziehen, dessen Verlängerung $L'M'$ in P' schneide; so wird der Punkt P' auf der Oberfläche enthalten sein. Da nun aber die Dreiecke LOP und $L'O'P'$ gleich sind, so hat man $OP' = OP$; folglich hat jede durch den Punkt O gehende und von der Oberfläche begrenzte Gerade ihre Mitte in O . Folglich hat das Hyperboloid denselben Mittelpunkt als das auf den drei Leitlinien dargestellte Parallelepipeton.

Anmerkung. Der vorige Beweis zeigt auch, jede in einer Art der Erzeugung, genommene Erzeugende, ihre Parallele in der anderen Art hat, dass diese beiden Geraden in einer, durch den Mittelpunkt gehenden Ebene liegen, und dass sie von demselben gleichweit entfernt sind.

73. Lehrsatz. Das hyperbolische Paraboloid kann auf zweierlei Weise durch eine Gerade erzeugt werden.

Dieses Paraboloid entsteht durch eine Gerade, welche sich auf zwei andere AB , CD (Fig. 25) stützt, und parallel zu einer Ebene XY bleibt; führt man daher parallele Ebenen zu XY , so bestimmen ihre Durchschnitte mit den Leitlinien Gerade wie AC , BD , EF , welche Erzeugende der Oberfläche sein werden. Legt man eine Ebene UV parallel zu den Geraden AB und CD ; nimmt AC und BD als Leitlinien eines zweiten Paraboloids, die Ebene UV zur Richtebene; so wird behauptet, daß dieses Paraboloid identisch mit dem ersten ist. Es ist demnach zu beweisen, daß irgend eine Erzeugende EF des ersten stets einer Erzeugenden des zweiten begegnet, oder was damit einerlei ist, daß jede zu UV parallele Ebene AC , BD , EF in drei Punkten G , H , I schneidet, welche in einer geraden Linie liegen.

Wird durch AB und AC eine Ebene geführt, so begegnen die, zu XY parallelen, die Erzeugenden BD , EF der ersten Oberfläche bestimmenden Ebenen, der Ebene BAC in den zu AC parallelen Geraden BK , EM . Eben so begegnen die, zu UV parallelen, die Erzeugenden CD , GH der zweiten Oberfläche bestimmenden Ebenen, der Ebene BAC in den zu AB parallelen Geraden CK , GL . Endlich sind die Durchschnitte dieser zwei Ebenen mit den zwei vorigen, die unter sich parallelen Geraden DK , FM , HL , IN .

Hiernach hat man dieser Parallelen wegen:

$$IN : FM :: EN : EM$$

$$FM : DK :: CM : CK$$

$$DK : HL :: BK : BL$$

Multipliziert man diese Proportionen in der Ordnung miteinander, und berücksichtigt, daß $EN = BL$ und $EM = BK$, so ergibt sich durch Vereinfachung der Verhältnisse:

$$IN : HL :: CM : CK \text{ oder } :: GN : GL;$$

folglich sind die Punkte G , H , I in einer geraden Linie. Folglich bilden die zwei Oberflächen nur eine.

Anmerkung I. Aus der zweifachen Entstehung des hyperbolischen Paraboloids geht hervor, dafs man durch jeden der Punkte desselben zwei Gerade auf dieser Oberfläche ziehen kann. Noch ergiebt sich hieraus, dafs jede zu zwei Erzeugenden derselben Art, parallele Ebene die Oberfläche in einer Geraden schneidet.

Anmerkung II. Nimmt man auf einem hyperbolischen Paraboloid drei Erzeugende derselben Art, wie AC , BD , EF , und bedient sich derselben um die Bewegung einer Geraden zu leiten, so beschreibt diese Gerade eine bestimmte Oberfläche, welche nichts Anderes als das Paraboloid selbst sein kann; folglich kann ein hyperbolisches Paraboloid durch eine Gerade entstehen, welche auf drei, zu einer Ebene parallelen Leitlinien hingleitet.

Umgekehrt ist jede, so entstandene Oberfläche ein hyperbolisches Paraboloid. Denn angenommen, dafs AC , BD , EF drei zur Ebene XY parallele Leitlinien, und AB und CD zwei dieselben in A , B , E und in C , D , F schneidende Erzeugende sind; so führe man die, zu diesen zwei Erzeugenden parallele Ebene UV , und hierauf parallel zu UV irgend eine Ebene, welche die Leitlinien in G , H , I schneidet. Indem man die vorigen Constructionen und Proportionen ausführt, ergiebt sich noch das Geradsein der Linie GHI ; folglich ist sie eine Erzeugende der Oberfläche. Es ist aber diese Gerade parallel zur Ebene UV ; folglich die Oberfläche ein hyperbolisches Paraboloid.

Anmerkung III. Da alle Erzeugende desselben Systems parallel zu einer Ebene sind, so schneiden sie jede Erzeugende des anderen proportionirt; und hieraus folgt, dafs das hyperbolische Paraboloid noch dadurch entstehen kann, indem die Linie EF auf den Leitlinien AB und CD gleitet, dergestalt, dafs man stets die Gleichheit $\frac{AE}{BE} = \frac{CF}{DF}$ hat.

Diese Eigenschaft wiederholt sich beim Hyperboloid mit einem Mantel. Angenommen, dafs die zu der näm-

lichen Ebene nicht parallelen Geraden AB , CD , GH (Fig. 26) die Leitlinien eines Hyperboloids seien. Nehmen wir nun zwei besondere Erzeugende ACG , BDH und hierauf irgend eine Erzeugende EFI , bezeichnet a eine, für jedes Hyperboloid bestimmte, constante Grösse, so wird $\frac{AE}{BE} = \frac{CF}{DF} \propto a$ erhalten.

Um diesen Satz zu beweisen, kann die durch die Gerade AB parallel zu CD gelegte Ebene dienen, welche GH im Punkte Q schneidet. Alle Constructionen sind durch die Figur angezeigt, und dem Leser wird überlassen darauf die Schlussfolge anzuwenden.

Berührungsebenen an windschiefe Oberflächen.

74. Lehrsatz. Haben zwei windschiefe Oberflächen eine gemeinschaftliche Erzeugende, und die nämlichen Berührungsebenen in drei Punkten dieser Erzeugenden, so vereinigen sich dieselben vollständig; d. h. sie haben dieselbe Berührungsebene in jedem anderen Punkte dieser Erzeugenden.

Es mögen L , M , N (Fig. 27) die drei Punkte auf der gemeinschaftlichen Erzeugenden sein, für welche die Berührungsebenen die nämlichen sind. Da die Berührungsebene am Punkte L den zwei Oberflächen gemein ist, so schneidet, führt man durch diesen Punkt irgend eine Ebene, diese jene in den Curven LA und LA' , welche zur gemeinschaftlichen Tangente den Durchschnitt LR dieser Ebene mit der Berührungsebene haben werden (48), die daher für ein unendlich kleines Stück LL' dieser Tangente, als mit derselben zusammenfallend zu erachten sind. Aehnlich so findet man, durch Führung einer Ebene durch den Punkt M zwei Curven MB , MB' , welche ein Element MM' gemein haben werden; und indem man durch den Punkt N eine Ebene führt, zwei Curven NC , NC' , welche auch ein gemeinschaftliches Element NN'

enthalten. Läßt man dann die Gerade LN auf den drei Curven LA , MB , NC , und hierauf auf den drei Curven LA' , MB' , NC' gleiten, so stellen sich obige zwei Oberflächen wieder her; folglich fallen diese zwei Oberflächen in dem ganzen, zwischen den unendlich benachbarten Erzeugenden LN und $L'N'$ gelegenen Stücke zusammenfallen; folglich haben diese Oberflächen in jedem Punkte von LN die nämliche Berührungsebene (47).

Anmerkung. Sind zwei windschiefe Oberflächen durch eine, zu der nämlichen Ebene parallel bleibende Gerade entstanden, so genügen zu ihrer Vereinigung zwei gemeinschaftliche Berührungsebenen zweier Punkte der nämlichen Erzeugenden. Denn, man nehme an, daß diese Bedingungen erfüllt sind, und führe durch jeden der zwei Punkte eine, diese Oberflächen schneidende Ebene. Man erhält so auf jeder Oberfläche zwei Curven, welche als die zwei Leitlinien dieser Curve genommen werden können, und die beziehentlich ein Element mit den Curven der anderen Oberfläche gemein haben; wenn folglich die Erzeugende, parallel zur Richtebene bleibend, diese gemeinschaftlichen Elemente durchläuft, so kann man dieselbe als auf den zwei Oberflächen zugleich liegend ansehen, und folglich vereinigen sich diese Oberflächen.

Im Allgemeinen sind zur Bestimmung der Bewegung einer Geraden, welche eine windschiefe Oberfläche beschreibt, drei Bedingungen nothwendig. Sind für zwei, eine gemeinschaftliche Erzeugende habende, windschiefe Oberflächen die drei Bedingungen verschieden, so gehören drei gemeinschaftliche Berührungsebenen für drei Punkte dieser Erzeugenden dazu, um damit sich diese Oberflächen in den anderen Punkten der gemeinschaftlichen Erzeugenden berühren. Haben sie aber eine Bedingung gemein, so genügen hierzu zwei gemeinschaftliche Berührungsebenen; und sind zwei Bedingungen gemein, so bedarf es nur einer einzigen.

75. Lehrsatz. Soll man eine Berührungsebene an einen gegebenen Punkt irgend einer windschiefen Oberfläche darstellen, so kann

man stets diese Oberfläche durch eine windschiefe Oberfläche von geradlinigen Leitlinien ersetzen, und dann ist die Construction der Berührungsebene leicht.

Es sei irgend eine windschiefe Oberfläche, eine zu ihr gehörige Erzeugende, und ein Punkt auf dieser Erzeugenden gegeben, durch welchen man eine Berührungsebene zu dieser Oberfläche zu führen beabsichtigt. Nach dem vorigen Lehrsatz kann man diese Oberfläche durch jede andere windschiefe Oberfläche ersetzen, welche sich mit ihr in der gegebenen Erzeugenden vereinigt; d. h. dafs die zwei Oberflächen drei Berührungsebenen in drei Punkten dieser Erzeugenden gemein haben müssen. Indessen sind die drei gemeinschaftlichen Berührungsebenen nicht erforderlich, ausser in dem Falle wo man, um die neue Oberfläche zu erzeugen, keine der drei Bedingungen behält, welche die Bewegung der Erzeugenden der ersten bestimmen; denn, wenn man die zwei Bedingungen nicht verändert, so genügen zwei Berührungsebenen; man braucht sogar nur noch eine, wenn blofs eine einzige Bedingung verändert wird.

Es leuchtet ein, dafs es unzählig viele windschiefe Oberflächen von geradlinigen Leitlinien giebt (Hyperboloide und Paraboloid), welche die Bedingungen der Vereinigung erfüllen können. Hat man einmal eine Wahl getroffen, so ist die Construction der Berührungsebene leicht. Denn, man weifs, dafs es möglich ist, durch jeden Punkt einer solchen Oberfläche zwei gänzlich in ihr gelegene Gerade zu ziehen (61, 73); und da diese Geraden sich selbst ihre eigenen Tangenten sind, so müssen sie in der Berührungsebene enthalten sein, welche jetzt bestimmt ist.

Man nehme z. B. an, dafs die drei Curven LA , MB , NC (Fig. 28) die Leitlinien einer windschiefen Oberfläche seien, LM eine Erzeugende, welche dieselben in L , M , N schneidet, und dafs man die Berührungsebene für den, auf dieser Erzeugenden liegenden Punkt G verlangt. Zu den drei Curven ziehe man die Tangenten

LO , MP , NQ , und nehme diese Tangenten als Leitlinien einer neuen windschiefen Oberfläche. In jedem der Punkte L , M , N wird die Berührungsebene die nämliche für die zwei Oberflächen sein; denn, im Punkte L z. B. muß die Berührungsebene einer jeden derselben die Erzeugende LM und die Tangente LO enthalten. Folglich vereinigen sie sich in LM vollkommen; folglich ist die Berührungsebene in G die nämliche für die zwei Oberflächen.

Um diese Berührungsebene zu bestimmen, reicht es daher hin, die zweite durch den Punkt G gehende, auf der zweiten Oberfläche enthaltene Gerade zu suchen. Da man schon eine Erzeugende LM dieser Oberfläche kennt, so lassen sich zwei andere OP und RS darstellen; indem man dann die Linien LM , OP , RS als Leitlinien dieser Oberflächen ansieht, was gestattet ist (71, 73), so bestimmt sich die Erzeugende GH , welche sie alle drei schneidet; die durch die Geraden GL und GH gehende Ebene muß die gesuchte Berührungsebene sein.

Einleuchtend ist es nun, daß man die Hülfsoberfläche auf unendlich verschiedene Weise wählen kann, ohne daß man darum aufhört, ihre Geraden als Leitlinien zu geben; denn statt der Tangenten LO , MP , NQ , kann man als Leitlinien drei beliebige Gerade nehmen, die beziehentlich durch die Punkte L , M , N in den Ebenen geführt werden, welche die gegebene Oberfläche in diesen drei Punkten berühren. Am besten ist es im Allgemeinen, als Leitlinien die Durchschnitte dieser Ebenen mit drei, zur Erzeugenden LM perpendicularen Ebenen zu nehmen. Dann ist die Hülfsoberfläche ein völlig bestimmtes Paraboloid (73, Anmerk. II) und die Construction der Berührungsebene vereinfacht sich. Um die Figur nicht zu verändern nehme man an, daß LO , MP , NQ die drei, zu LM perpendicularen Leitlinien sind. Man suche eine Gerade OP , welche sie alle dreie schneidet; und führe durch den Punkt G perpendicular zu LM eine, OP in H schneidende Ebene. Nach einer bekannten Eigenschaft (73, Anmerk. I), ist man versichert, daß die Gerade GH auf

dem Paraboloid liegt; folglich ist die Ebene LGH die gesuchte Berührungsebene.

Aufgaben über die Berührungsebenen an developpabeln Oberflächen.

76. Aufgabe I. Aus der horizontalen Trace eines Cylinders und der Lage der Erzeugenden, die Berührungsebene für einen auf dem Cylinder gegebenen Punkt zu finden.

Es sei $aecf$ (Aufgaben der zweiten Abtheilung Fig. I) die horizontale Trace des Cylinders, d. h. die Curve in welcher derselbe die Horizontalebene trifft. Um die Constructionen möglichst einfach zu machen, werde angenommen, daß diese Curve ein Kreis sei; es ist aber die Erklärung nichts desto weniger allgemein.

Da die Lage der Erzeugenden gegeben ist, so kann man zur Curve $aecf$ die Tangenten ab , cd , parallel zur Horizontalprojection der Erzeugenden ziehen; diese Tangenten sind die Gränzen der Horizontalprojection des Cylinders, denn es leuchtet ein, daß alle Erzeugenden sich zwischen diesen zwei Linien projeciren werden. Zieht man die Tangenten ee' , ff' , perpendicular zu xy , und die Geraden $e'g'$, $f'h'$ parallel zur Verticalprojection der Erzeugenden; so ist es auch klar, daß diese letzteren Geraden die Gränzen der Verticalprojection des Cylinders sein werden.

Es werde nun eine der Projectionen eines Punktes des Cylinders als gegeben angenommen, z. B. die Horizontalprojection m und die andere sei zu ermitteln. Zu diesem Behuf führe man eine, zu den Erzeugenden parallele Verticalebene, welche den Cylinder nur in einer, oder in mehreren Erzeugenden schneiden kann; die Durchschnitte dieser Erzeugenden mit der, durch den Punkt m errichteten Verticale geben die, in m projecirten Punkte der Oberfläche. Die Tracen dieser Ebene sind die, parallel zu ab durch den Punkt m geführte Gerade mq , und die zu xy perpendicularäre Gerade qq' . Da die erste die Curve

$aecf$ in i und k trifft, so folgt, daß diese Ebene den Cylinder in zwei Erzeugenden schneidet, welche alle zwei, ihre Horizontalprojection in mq liegend haben, und deren Verticalprojectionen sich ergeben, indem man die Perpendikel ii' , kk' auf xy fällt, und die Parallelen $i'q'$, $k'q''$ zu $f'h'$ zieht. Dann ziehe man die Linie mm' auch perpendikulär zu xy ; so sind die Punkte m' und m'' wo solche die Linien $i'q'$ und $k'q''$ trifft die Verticalprojectionen derjenigen Punkte des Cylinders, welche der Horizontalprojection m entsprechen.

Dies vorausgesetzt, so werde nun angenommen, daß man die Berührungsebene, des Punktes $[m, m']$ fordere. Zuvörderst bemerke man, daß diese Ebene die Erzeugende $[im, i'm']$ enthalten muß, deren Tracen i und q' sind; und hierauf, daß sie berührend für den Cylinder in jedem Punkte dieser Erzeugenden ist (56). Nun aber enthält die Berührungsebene einer Oberfläche die Tangenten aller, auf der Oberfläche durch den gegebenen Berührungspunkt gehenden Curven; wenn man folglich die Tangente it zur Curve aec zieht, so wird dieselbe in der gesuchten Berührungsebene enthalten sein; und da sie in der Horizontalebene liegt, so ist sie die horizontale Trace der Berührungsebene. Wird nun it bis zur Begegnung α mit xy verlängert und $\alpha q'$ gezogen, dann muß die Gerade $\alpha q'$ die verticale Trace dieser Ebene sein.

Bemerkungen. Zuweilen ist der Punkt q' sehr entfernt, und dann unbequem zur Bestimmung von $\alpha q'$. In diesem Falle wählt man einen Punkt der Erzeugenden $[im, i'm']$, den Punkt $[m, m']$ z. B., und führt durch ihn eine Parallele zur horizontalen Trace $t\alpha$. Diese Parallele hat zu Projectionen, mr parallel zu $t\alpha$, und $m'r'$ parallel zu xy ; und da sie in der Berührungsebene liegt, so gehört ihre verticale Trace r' zur verticalen Trace dieser Ebene. Folglich kann der Punkt r' zur Bestimmung dieser letzten Trace dienen, oder zu ihrer Bestätigung, wenn sie schon bekannt ist. Man könnte noch für denselben Zweck eine Parallele zu den Erzeugenden

durch einen beliebigen Punkt der horizontalen Trace α ziehen.

Zöge man eine zweite Berührungsebene zum Cylinder, so würde man dann darin eine neue Bestätigung haben, daß ihr Durchschnitt mit der ersten der Erzeugenden parallel sein müßte. Diese Eigenschaft geht daraus hervor, daß jede Berührungsebene eine Erzeugende enthält, und daß alle Erzeugenden parallel unter sich sind (Einleit. 23). In der Figur hat man die Berührungsebene zum Punkte $[m, m'']$ bestimmt; ihre Tracen sind $t\beta$ und $\beta q'$; die Projectionen ihres Durchschnitts mit der andern Berührungsebene sind die Geraden tu und $t'u'$, welche parallel zu ab und $a'h'$ sein müssen.

Die Methode, wornach man die Projectionen m' , m'' bestimmte, welche der Horizontalprojection m entsprechen verdient beachtet zu werden, weil dieselbe zur Darstellung der Durchschnitte eines Cylinders und irgend einer Geraden angewendet werden kann. Hierzu leuchtet es ein, daß wenn man durch diese Gerade eine den Erzeugenden parallele Ebene führt, die horizontale Trace dieser Ebene jene des Cylinders in zwei Punkten treffen muß, welche den Erzeugenden angehören, darin die Ebene den Cylinder schneidet. Nun ist es leicht die Projectionen dieser Erzeugenden zu erhalten, und folglich diejenigen der gesuchten Punkte.

77. Aufgabe II. An einen Cylinder durch einen äußeren Punkt eine Berührungsebene zu führen.

Eine Berührungsebene an einen Cylinder muß eine Erzeugende enthalten, und in der vorigen Aufgabe sah man, daß die horizontale Trace jener, berührend zu derjenigen des Cylinders ist; denkt man sich folglich durch den gegebenen Punkt eine, den Erzeugenden parallele Gerade, so wird sie gänzlich in dieser Ebene liegen; und hat man die horizontale und verticale Trace dieser Parallele dargestellt, so ziehe man durch die ersteren Tangenten zur horizontalen Trace des Cylinders, und es wer-

den diese Tangenten die horizontalen Tracen der, durch den gegebenen Punkt gehenden Berührungsebenen sein. Um dann deren verticale Tracen zu erhalten, verbinde man die verticale Trace der nämlichen Parallele mit den Durchschnittspunkten der horizontalen Tracen dieser Ebenen und der Projectionsaxe.

Die Einzelheiten der Construction sind in der Figur II dargestellt. Die Projectionen des Cylinders sind wie in der vorigen Aufgabe gezeichnet; die Projectionen des gegebenen Punktes m und m' , diejenigen der Parallele zur Erzeugenden mt und $m't'$, und die Tracen dieser Parallele sind t und u' ; folglich werden die, zur horizontalen Trace des Cylinders gezogenen Tangenten $t\alpha$, $t\beta$, die horizontalen, und die Geraden $\alpha u'$, $\beta u'$ die verticalen Tracen der Berührungsebenen sein.

Bemerkung. Der Prüfung wegen, hat man durch den gegebenen Punkt Parallelen zu den horizontalen Tracen $t\alpha$ und $t\beta$ gezogen; die Durchgangspunkte r' und s' dieser Parallelen mit der Verticalebene müssen sich in den verticalen Tracen $\alpha u'$ und $\beta u'$ befinden. Die Erzeugenden in welchen die zwei Ebenen den Cylinder berühren, bieten auch ein Prüfungsmittel dar. Die eine derselben, welche ip und $i'p'$ zu Projectionen hat, trifft die Verticalebene in p' , und die andere, von den Projectionen kq und $k'q'$ in q . Nun aber sieht man leicht, dafs die Trace $\alpha u'$ durch den Punkt p' , und die Trace $\beta u'$ durch q' gehen müsse.

78. Aufgabe III. An einen Cylinder eine Berührungsebene parallel zu einer gegebenen Geraden zu führen.

Eine Berührungsebene, parallel zu einer gegebenen Geraden, wird eine Erzeugende des Cylinders und eine Parallele zur gegebenen Geraden enthalten; wenn man daher durch einen Punkt dieser Geraden eine Parallele zu den Erzeugenden zieht, so muß die Berührungsebene parallel zu der, durch diese zwei Geraden bestimmten Ebene sein. In Folge dessen, stelle man die Tracen die-

ser letzteren Ebene dar; ziehe parallel zu ihrer horizontalen Trace, Tangenten zur horizontalen Trace des Cylinders; und es werden diese Tangenten die horizontalen Tracen derjenigen Berührungsebene sein, welche der Forderung genügen. Die verticalen Tracen anlangend, so sind diese leicht darzustellen, da man ihre Durchschnittspunkte mit der Projectionsaxe und eine Gerade kennt, wozu sie parallel sind.

In der Figur III, ist $[o, o']$ der in der gegebenen Geraden genommene Punkt, derjenige, durch welchen man eine Parallele zu den Erzeugenden des Cylinders gezogen hat; und die Tracen der, durch diese zwei Linien gehenden Ebene sind γv und $\gamma v'$. Parallel zur horizontalen Trace γv führete man die Tangenten $r\alpha$ und $s\beta$, und parallel zur verticalen Trace $\gamma v'$ die Geraden $\alpha r'$ und $\beta s'$. Die Ebenen $r\alpha r'$, $s\beta s'$ sind die gesuchten Berührungsebenen.

Zur Bestätigung bemerke man, daß die Erzeugenden $[ip, i'p']$ und $[kq, h'q']$ die Verticalebene in den Tracen $\alpha r'$ und $\beta s'$ treffen müssen.

79. Aufgabe IV. Aus der horizontalen Trace eines Kegels und den Projectionen des Scheitels, die Berührungsebene für einen, auf der Oberfläche gegebenen Punkt zu finden.

Der zu verfolgende Gang ist der nämliche wie für den Cylinder. Es seien acd (Fig. IV) die Basis oder horizontale Trace des Kegels, und o, o' die Projectionen des Scheitels. Um die Gränzen zu erhalten, zwischen welchen sich alle Erzeugenden der Oberfläche projeciren, so führe man in der Horizontalebene die Tangenten oa und ob , und nachdem auch die Tangenten cc', dd' perpendicular zu xy geführt wurden, ziehe man in der Verticalebene die Geraden $o'c', o'd'$.

Man beginne nun die Punkte der Oberfläche zu bestimmen, welche einer gegebenen Projection entsprechen, z. B. der verticalen Projection m' . Zieht man die, xy

in e' schneidende Gerade $o'm'$, und errichtet das Perpendikel $e'e$ zu xy , so sind die Geraden $o'e'$ und $e'e$ die Tracen einer, zur Verticalebene perpendikulären Ebene, welche die gesuchten Punkte enthält, und durch den Scheitel des Kegels geht. Diese Ebene kann dem Kegel nur in Erzeugenden begegnen; und da ihre horizontale Trace $e'e$ die Basis acd in den Punkten e und f trifft, so ist es klar, daß die horizontalen Projectionen dieser Erzeugenden oe und of sind. Es ist dann leicht, die horizontalen Projectionen m und n der gesuchten Punkte zu finden.

Gesetzt, man wollte die Berührungsebene für den Punkt $[m, m']$ haben. Man berücksichtige daß diese Ebene die Erzeugende $[oe, o'e']$ enthalten, und in der ganzen Ausdehnung dieser Linie den Kegel berühren wird (56). Zieht man folglich die Tangente ta zum Punkt e , und verbindet hierauf den Punkt a mit dem Punkt p' , wo die erzeugende die Verticalebene durchdringt, so werden ta und ap' die Tracen der Berührungsebene sein.

Bemerkungen. Die hier zu beachtenden Wahrnehmungen sind dieselben wie beim Cylinder. Führt man zuvörderst durch einen beliebigen Punkt der Erzeugenden $[oe, o'e']$, z. B. durch den Scheitel, eine Parallele zur Trace ea , so muß der Durchschnittspunkt r' derselben mit der Verticalebene, in der Trace ap' liegen. Stellt man hierauf die Berührungsebene für den Punkt $[n, m']$ dar, so muß ihr Durchschnitt mit der ersten, durch den Scheitel des Kegels, und folglich die eine der Projectionen tu und $t'u'$ dieses Durchschnitts, durch den Punkt o , und die andere durch den Punkt o' gehen.

Um die, einer gegebenen Projection entsprechenden Punkte eines Kegels zu erhalten, oder was das Nämliche ist, um die Durchschnitte eines Kegels, mit einem Perpendikel, zu einer der Projectionsebenen zu finden, haben wir weiter oben ein Verfahren angewendet, dessen man sich für jede beliebige Gerade bedienen kann. D. h. man legt durch diese Gerade und durch den Schei-

tel eine, den Kegel in einer oder mehreren Erzeugenden schneidende Ebene, und nimmt die Durchschnitte dieser Erzeugenden mit der gegebenen Geraden.

80. Aufgabe V. Eine Berührungsebene an einen Kegel durch einen äußeren Punkt zu führen.

Jede Berührungsebene an einen Kegel geht durch den Scheitel, und hat zur horizontalen Trace eine Tangente zur Basis. Aus diesem Grunde verbinde man den gegebenen Punkt mit dem Scheitel durch eine Gerade, führe hierauf, durch deren Durchschnitt mit der Horizontalebene Tangenten zur Basis des Kegels; diese Tangenten werden die horizontalen Tracen der gesuchten Berührungsebenen sein. Um ihre verticalen Tracen zu erhalten, ist nichts weiter nöthig als die verticale Trace der nämlichen Geraden mit den Durchschnittspunkten der Tangenten zur Basis und der Projectiionsaxe zu vereinigen.

In dem Entwurf (Fig. V) sind die Projectionen des Scheitels o, o' ; diejenigen des gegebenen Punktes m, m' ; jene der durch diese zwei Punkte gehenden Geraden $om, o'm'$; die Tracen dieser Geraden t und u' , und endlich die Berührungsebenen $t\alpha u', t\beta u'$.

Zur Bestätigung, hat man die verticalen Tracen p' und q' der Berührungserzeugenden gesucht, und auch die verticalen Tracen r' und s' der, durch den gegebenen Punkt zu den horizontalen Tracen der zwei Berührungsebenen geführten Parallelen.

81. Aufgabe VI. Eine Berührungsebene an einen Kegel, einer gegebenen Geraden parallel zu legen.

Die Berührungsebene muß durch den Scheitel des Kegels gehn und einer gegebenen Geraden parallel sein, sie enthält also die, durch den Scheitel zu dieser Geraden gelegte Parallele. Dieses Wenige genügt, um zu zeigen, dafs, nachdem man die Projectionen $ot, o't'$ (Fig. VI) dieser Parallele erhalten hat, die auszuführenden Con-

structionen genau die nämlichen wie in der vorigen Aufgabe sind. Sie sind alle in der Zeichnung dargestellt.

Aufgaben über Berührungsebenen an Revolutionsoberflächen.

In dieser Aufgabe und in den nachfolgenden, mögen für die gegebenen Stücke die sogleich zu bemerkenden Bestimmungen gelten. Größerer Einfachheit wegen werde die Revolutionsaxe perpendicular zur Horizontalebene genommen (Fig. VII); dann ist ihre horizontale Projection ein einziger Punkt a , und ihre verticale $a'a''$ ein Perpendikel zu xy . Setzt man nun, daß eine, zur Verticalebene parallele Ebene durch die Axe geführt sei, so schneidet sie die Oberfläche in einem Meridian, welcher sich in wahrer Gröfse auf der Verticalebene projecirt; diese ist die, als bekannt angenommene Curve $n'b'n''$. Die horizontale Projection dieser Curve fällt mit der horizontalen Trace der sie enthaltenden Ebene zusammen; uv ist diese parallel zu xy und durch den Punkt a gehende Trace. In der Figur ist die Curve $n'b'n''$ eine Ellipse, und der aus dem Mittelpunkte a mit dem Halbmesser ab geführte Kreis, ist die horizontale Projection der, mit der kleinen Axe beschriebenen Parallele.

Zuvörderst ist, so wie diefs für die Cylinder und Kegel geschah, zu erklären, wie man die Punkte der Oberfläche bestimmt, welche zur Projection einen gegebenen Punkt der Horizontal- oder Verticalebene haben. Es sei m diese in der Horizontalebene genommene Projection; man sieht leicht, daß die durch die Punkte a und m gehende, die Gerade tr zur Trace habende Verticalebene, die Oberfläche in einem, dem $n'b'n''$ gleichen Meridiane schneidet, und daß die, in m sich projecirenden Punkte der Oberfläche, zu diesem Meridian gehören. Um dieselben leicht zu bestimmen, drehe man die Ebene dieser Curve um die Axe, bis solche parallel zur Verticalebene geworden ist. Dann wird sich die Curve auf $n'b'n''$

projiciren, die Trace tr mit uv zusammenfallen, der Punkt m nachdem er einen Bogen des Kreises um den Mittelpunkt a beschrieben hat, nach n auf uv kommen, und folglich werden die Durchschnitte n' und n'' der Curve $n'b'n''$ mit der Projectionslinie nn' die verticalen Projectionen der gesuchten Punkte sein, diese in ihren neuen Lagen gedacht. Während der Drehung sind diese Punkte in derselben Höhe über der Horizontalebene geblieben; folglich werden ihre wirklichen Projectionen in den Horizontalen $n'm'$, $n''m''$ liegen; folglich endlich sind sie in den Durchschnitten m' und m'' dieser Horizontalen mit der Projectionslinie mm' *).

Jetzt handele es sich darum, die Berührungsebene für den Punkt $[m, m']$ zu finden. Sie muß die zwei an diesen Punkt gezogenen Tangenten enthalten, davon die eine der Parallele die andere dem Meridian angehört, und hierdurch ist es leicht dieselbe zu bestimmen. Die erste Tangente ist horizontal; sie hat zu Projectionen die Geraden $m'p'$ und mp , deren eine parallel zu xy , und die andere perpendicular zu am ist; und sie trifft die Verticalebene in p' . Hieraus folgert man, daß die horizontale Trace der Berührungsebene parallel zu mp ist, und daß ihre verticale Trace durch den Punkt p' geht.

Um am Meridian die Tangente des Berührungspunktes zu erhalten, ziehe man zuvörderst die Tangente $n'q'$ zur Curve $n'b'n''$. Die Geraden uv , $n'q'$ sind die Projectionen der Tangente im Punkte $[n, n']$ des Meridians an **); und diese Tangente trifft die Horizontalebene im Punkte q . Nun aber beschreibt, wenn man den Meridian

*) Hätte man statt der horizontalen Projection m die verticale Projection m' als gegeben genommen, so würde die Construction noch sehr einfach gewesen sein; denn dann kennt man sofort die Parallele, welche die übereinstimmenden Punkte der Oberfläche enthält.

**) Unter dem Meridian an , hat man denjenigen zu verstehen, welcher in der, durch an errichteten Verticale liegt.

an zum Meridian am zurückführt, der Punkt q einen Bogen des um den Mittelpunkt α beschriebenen Kreises, und kommt nach r ; folglich ist der Punkt r der Fußpunkt der durch den Punkt $[m, m']$ an den Meridian dieses Punktes gehenden Tangente; folglich geht die horizontale Trace der Berührungsebene durch den Punkt r . Weiter oben sah man, daß sie parallel zu mp sein, und daß die verticale Trace durch p' gehen müsse; folglich wird, indem man die Parallele $r\alpha$ zu mp führt, und ap' zieht, rap' die Berührungsebene sein.

Bemerkungen. Es ist nicht nöthig, die Projectionen der letzteren Tangente zu suchen, inzwischen leicht sie zu erhalten. Denn, da die Tangente des Punktes $[n, n']$ beim Zurückführen in den Meridian am stets die Revolutionsaxe im nämlichen Punkte der Linie $a'a''$ trifft, so müssen folglich, indem man eine Gerade durch die Punkte m' und a' zieht, die Linien am und $a'm'$ die Projectionen der zweiten Tangente sein. Man kann diese Projectionen zur Bestimmung der Tracen dieser Tangente anwenden, welche in den Tracen der Berührungsebene rap' liegen müssen, und zu deren Bestätigung dienen können.

Wär' die Berührungsebene für den Punkt $[m, m'']$ verlangt worden, so würde man ähnliche Constructionen auszuführen haben. Nachdem sie vollzogen worden sind, wird man bemerken, daß die zwei Tangenten des Meridians am sich in der nämlichen Höhe schneiden, wie die Tangenten an den Punkten n' und n'' der Curve $n'b'n''$, und daß sich folglich die Berührungsebenen gleichfalls in einer, in dieser Höhe liegenden Horizontale schneiden. Man würde also noch folgende Bestätigungen haben: nämlich daß der Durchschnitt der Tangenten in n' und n'' , derjenige der verticalen Projectionen der Tangenten am Meridian am , und jener der verticalen Tracen der Berührungsebenen, drei in der nämlichen Parallele zu xy gelegene Punkte sind.

83. Aufgabe VIII. An eine Revolutionsoberfläche eine Berührungsebene einer gegebenen Ebene parallel zu führen.

Jede Berührungsebene an einer Revolutionsoberfläche muß perpendicular zu der, durch den Berührungspunkt gehenden Meridianebene sein (59), und die durch diesen Punkt zu demselben Meridian gezogene Tangente enthalten. Nun aber soll die verlangte Berührungsebene parallel zu einer gegebenen Ebene sein; führt man folglich durch die Revolutionsaxe eine Ebene perpendicular zur gegebenen Ebene, so schneidet sie die Oberfläche in dem Meridiane darin der Berührungspunkt liegt, und zugleich die gegebene Ebene in einer Geraden zu welcher die Tangente des Meridians parallel sein muß. Hieraus ergibt sich die Lösung des vorliegenden Problems. Zuvörderst führt man durch die Revolutionsaxe und perpendicular zur gegebenen Ebene eine Ebene, welche die gegebene in einer Geraden und die Oberfläche in einem Meridian schneidet; hierauf ziehe man zu diesem Meridian Tangenten parallel zu dieser Geraden; dann endlich durch diese Tangenten perpendicular Ebenen zur Meridianebene, welche die gesuchten Berührungsebenen sein werden.

Das die Oberfläche betreffende Gegebene ist wie in der Aufgabe VII angeordnet, und es werde $b\alpha b'$ (Fig. VIII) als die gegebene Ebene angenommen. Das auf $b\alpha$ gefällte Perpendikel ac ist die Trace der, den Berührungspunkt enthaltenden Meridianebene. Diese Ebene schneidet die Ebene $b\alpha b'$ in einer durch c gehenden Geraden, wofür ein zweiter Punkt zu suchen ist. Zu diesem Behufe denke man sich, durch irgend einen, der Trace $\alpha b'$ angehörigen Punkt $[d, d']$ eine Parallele $[de, d'e']$ zur Trace $b\alpha$; der Durchschnitt e von ac mit de ist die horizontale Projection eines zweiten Punktes, der besprochenen Geraden. Dreht man dann die Meridianebene ac um die Axe, um sie parallel zur Verticalebene zu haben, so wird es leicht sein, die Lagen f und g zu erhalten, welche die Punkte c und e einnehmen; und folglich die

verticale Projection $f'g'$ der Geraden in ihrer neuen Stellung.

Man habe nun vor der Drehung parallel zu dieser Geraden, Tangenten an den in der Ebene ac liegenden Meridian gezogen. Um ihre verticalen Projectionen nach der Fortdrehung der Ebene ac zu erhalten, genügt es, zu der in der Verticalebene gegebenen Curve $h'a'k'$ die Tangenten $h'i'$, $k'l'$ parallel zu $f'g'$ zu ziehen. Ihre horizontalen Projectionen anlangend, so sind dieselben dann in uv , und ihre horizontalen Tracen auch auf uv in i und l . Sobald man den Meridian und die Tangenten in ihre wahre Lage zurückführt, dann kommen diese Punkte auf ac nach p und q ; da nun die gesuchten Berührungsebenen die Tangenten enthalten werden, deren horizontale Tracen p und q sind, und überdiess dieselben parallel zur Ebene bab' sein müssen; so werden, wenn man $p\beta$, $q\gamma$ parallel zu $b\alpha$, und hierauf bp' , $\gamma q'$ parallel zu $\alpha b'$ zieht, $p\beta p'$ $q\gamma q'$ die Berührungsebenen sein.

In Betreff der Berührungspunkte, bemerke man, daß deren verticalen Projectionen h' , k' nach der Drehung bekannt sind; und hiernach ist es leicht, auf die wahren Projectionen dieser Punkte zurück zu kommen, welche m und m' , n und n' sind. Nun kann man dadurch Bestätigungen erhalten, indem man durch diese Punkte horizontale Parallelen zu $b\alpha$ zieht, welche die Verticalebene in den, mit den Tracen $\beta p'$ und $\gamma q'$ liegenden Punkten r' und s' durchdringen müssen.

84. Aufgabe IX. Durch einen, außerhalb einer Revolutionsoberfläche gegebenen Punkt eine Berührungsebene zu dieser Oberfläche zu führen, dergestalt, daß die Berührung auf einer gegebenen Parallele stattfindet.

Das Mittel der Auflösung besteht darin, die Revolutionsoberfläche durch eine andere Oberfläche zu ersetzen, welche jene in allen Punkten der gegebenen Parallele berührt, und vermittelst welcher die Aufgabe leicht zu

lösen sei. Um diese Bedingungen zu erfüllen, kann man einen Kegel oder eine Kugel wählen, wodurch Anlaß zu zwei Auflösungen gegeben wird. **Erste Auflösung** (Fig. IX). Man denke sich, daß eine Tangente zu einem Meridiane durch einen Punkt der gegebenen Parallele geführt sei, und sich zugleich mit dem Meridian um die Revolutionsaxe drehe. Man sieht leicht, daß dieselbe einen geraden, die gegebene Parallele enthaltenden Kegel erzeugt; nun aber, wird behauptet, daß in jedem Punkte dieser Parallele die Berührungsebene die nämliche für den Kegel wie für die gegebene Oberfläche ist. Denn, damit eine, durch einen Punkt der Parallele gehende Ebene berührend zum Kegel sei, muß sie die Tangente zu dieser Parallele und eine Erzeugende des Kegels enthalten; um aber berührend zur gegebenen Oberfläche zu sein, muß sie die Tangente der nämlichen Parallele, und die Tangente des Meridians enthalten, welche keine andere, als die Erzeugende des Kegels ist; folglich bilden die zwei Berührungsebenen nur eine einzige. Demnach handelt es sich bloß darum eine Berührungsebene an den Kegel durch den gegebenen Punkt zu führen, welches Problem bereits gelöst worden ist (80).

Aber in der dort aufgestellten Auflösung, bediente man sich der, durch den Scheitel des Kegels und durch den gegebenen Punkt gehenden Geraden, da es sich jedoch ereignen kann, daß dieser Scheitel auf der Axe weit entfernt ist, so wird es angemessen sein zu erfahren, wie solche zu entbehren ist. Es wird dieß der Fall sein, wenn man bemerkt, daß die, durch den gegebenen Punkt gehende Horizontalebene, den Kegel in einem Kreise trifft, und die Berührungsebenen in Tangenten zu diesem Kreise; dergestalt, daß wenn man durch den gegebenen Punkt zwei Tangenten zu diesem Kreise führt, und hierauf eine Ebene durch jede dieser Tangenten und durch die entsprechende Erzeugende des Kegels, man die zwei Berührungsebenen erhalten wird, welche der

Forderung genügen. Die zu vollziehenden Contructionen lassen sich nun leicht übersehen.

Es seien d und d' die Projectionen des gegebenen Punktes, und bmc , $b'c'$ jene der gegebenen Parallele. Zieht man die Tangente $b'e'$, so ist sie die verticale Projection der Erzeugenden des Hülfskegels, und die Horizontale $d'e'$ die verticale Trace einer horizontalen, durch den gegebenen Punkt gehenden Ebene. Man bestimme die Projectionen e , e' des Begegnungspunktes der Erzeugenden mit dieser Ebene; beschreibe mit dem Halbmesser ae einen Kreis, und führe zu ihm die Tangenten dg und dh , oder vielmehr auf ad als Durchmesser einen Kreis, welcher den ersten in den Berührungspunkten g und h schneidet, die man bedarf. Diese Punkte sind in der That die horizontalen Projectionen zweier Punkte, welche den Erzeugenden angehören, darin die Berührung der Berührungsebenen mit dem Kegel statt findet; und folglich sind die horizontalen Projectionen dieser Erzeugenden die Geraden ag und ah . Dann ist es offenbar, daß die Durchschnitte m und n dieser Geraden mit der Projection bmc der gegebenen Parallele, die horizontalen Projectionen der Berührungspunkte der gegebenen Oberfläche mit den geforderten Berührungsebenen sind. Hierauf findet man leicht die verticalen Projectionen m' und n' dieser Punkte.

Kommen wir nun zur Bestimmung der Berührungsebenen. Die horizontale Trace der in $b'e'$ projecirten Tangente ist p , und während daß diese Tangente den Kegel erzeugt, beschreibt der Punkt p um den Mittelpunkt a einen Kreis, welcher ag in q , und ah in r schneidet; hieraus schließt man, daß die Punkte q und r die horizontalen Tracen der Erzeugenden sind, in welchen die Berührungsebenen den Hülfskegel berühren. Ueberdies müssen die Berührungsebenen die, in dg und dh projecirten, horizontalen Tangenten enthalten. In Folge dessen, stelle man die verticalen Tracen i' und k' dieser Tangenten dar, ziehe die Linien $q\alpha$ und $r\beta$ beziehentlich parallel zu diesen Tangenten, hierauf die Geraden $\alpha i'$ und

$\beta k'$, so werden $q\alpha i$ und $r\beta k'$ die verlangten Berührungsebenen sein. *)

85. **Zweite Auflösung** (Fig. IX). Anstatt eines Kegels, kann man sich einer Kugel bedienen, die in jedem Punkte der gegebenen Parallele die nämliche Berührungsebene wie die Oberfläche hat. Um diese Bedingung zu erfüllen, ziehe man durch einen Punkt dieser Parallele die Tangente und Normale zu dem durch diesen Punkt gehenden Meridian; so wird das zwischen der Axe und der Oberfläche enthaltene Stück der Normale der Halbmesser der Hilfskugel sein. Denn es ist klar, daß wenn man zugleich den Kreis und den Meridian um die Axe dreht der, beiden gemeinschaftliche Punkt, die gegebene Parallele beschreibt, und daß sie in jedem Punkte dieser Parallele eine gemeinschaftliche Tangente haben; nun aber muß die Berührungsebene an jede Oberfläche diese Tangente enthalten, und auch die Tangente zur Parallele; folglich ist sie für die zwei Oberflächen die nämliche. Die Forderung beschränkt sich folglich darauf, durch den gegebenen Punkt eine Ebene zu führen, welche die Kugel auf der gegebenen Parallele berührt.

Man ziehe vom gegebenen Punkte eine Gerade nach dem Mittelpunkte der Kugel; führe durch diese Gerade eine, die Kugel in einem größten Kreise schneidende Ebene; lege durch den gegebenen Punkt Tangenten zu diesem Kreis; endlich denke man sich, daß dieser Kreis und die zwei Tangenten sich um die Gerade drehen, welche den Mittelpunkt mit dem gegebenen Punkte verbind-

*) Die hier erklärten Constructionen könnten noch auf folgende einfachere Art dargestellt werden. Man ziehe an irgend einen Punkt der gegebenen Parallele eine Berührungsebene zur Revolutionsoberfläche; drehe den Meridian wozu diese Ebene perpendicular ist um die Axe, und denke sich, sie zöge die Berührungsebene mit nach. Es wird leicht sein, die Lage dieser letzteren Ebene zu finden, in welcher sie durch den gegebenen Punkt geht, und dann ist die Aufgabe gelöst.

det. Es leuchtet ein, daß die Berührungspunkte einen Kreis beschreiben, dessen Ebene perpendicular zu dieser Geraden ist, und auf welcher sich die Berührungspunkte aller Berührungsebenen befinden, welche man durch den gegebenen Punkt zur Kugel legen kann; folglich sind die Begegnungspunkte dieser Ebene und der gegebenen Parallele, die Berührungspunkte der gesuchten Berührungsebenen. Sind diese Punkte einmal bekannt, so ist es leicht die Berührungsebenen zu bestimmen.

Angenommen, es sei der Erzeugungskreis der Hilfskugel im Meridian bc verzeichnet. Um ihre verticale Projection zu erhalten genügt es, die Normale $b'o'$ zu ziehen, und mit dem Halbmesser $o'b'$ aus dem Mittelpunkte o' einen Kreis zu beschreiben. Die durch die Gerade ad errichtete Verticalebene enthält den gegebenen Punkt $[d, d']$ und einen größten Kreis der Kugel; und wenn man durch diesen Punkt zwei Tangenten zu diesem Kreise zieht, so ist die, durch diese zwei Berührungspunkte perpendicular zur Ebene der Tangenten geführte Ebene, diejenige, welche in ihrem Durchschnitt mit der gegebenen Parallele die Berührungspunkte bestimmt, wofür die Projectionen zu suchen sind. Um hierzu zu gelangen, drehe man die Ebene der Tangenten um die Axe, bis solche parallel zur Verticalebene geworden ist. Dann ist der Kreis $o'b'$ die verticale Projection des größten Kreises; diejenigen des gegebenen Punktes $[d, d']$ in seiner Lage ergeben sich, indem man den Bogen $d\delta$ beschreibt, die Horizontale $d'\delta'$ zieht, und das Perpendikel $\delta\delta'$ zu xy errichtet; endlich werden die Geraden $\delta\lambda'$ und $\delta'\lambda''$ Projectionen der Tangenten für den Kreis $o'b'$ sein.

Wenn der gegebene Punkt wirklich zu Projectionen die Punkte δ und δ' hätte, so sieht man leicht, daß die durch die Sehne $\lambda'\lambda''$ perpendicular zur verticalen Projectionsebene geführte Ebene, diejenige wäre, darin die Durchschnitte mit der gegebenen Parallele genommen werden müßten. Auch ist es klar, daß diese Durchschnitte in der Begegnung ϵ' von $\lambda'\lambda''$ mit $b'c'$ vertical, und in den

Begegnungspunkten μ und γ , des Kreises ab mit der Projectionslinie $\mu s'$, horizontal projeciret wären, dergestalt, daß der eine der gesuchten Punkte in μ und s' , der andere in γ und s' projecirt sein wird. Es kommt folglich nur darauf an, zu finden, wohin diese Punkte kommen, sobald man die Ebene der Tangenten in ihre wahre Lage zurückführt. Nun aber bleibt, während dieser rückgängigen Bewegung, die Gerade, welche diese Punkte vereinigt in der gegebenen Parallele, und sie wird fortwährend perpendicular in ihrer Mitte von der Ebene der Tangenten geschnitten; folglich ergiebt sich die Horizontalprojection dieser Geraden, indem die Sehne mn perpendicular zu ad , und in derselben Entfernung vom Mittelpunkte wie $\mu\gamma$ gezogen wird. Auf diese Weise erhält man die Horizontalprojectionen m und n der Berührungspunkte der Oberfläche mit den gesuchten Ebenen, und folgert hieraus die Verticalprojectionen m' und n' .

Da die Berührungspunkte bekannt sind, so führt die Bestimmung der Berührungsebenen zu einer bereits gelöseten Aufgabe (82). Aber da diese Ebenen berührend zur Kugel sein müssen, so kann man sie noch dadurch bestimmen, daß man durch den Punkt $[d, d']$ zwei, beziehentlich zu den Halbmessern $[am, o'm']$ und $[an, o'n']$ perpendicularäre Ebenen führt. Diese Constructionen sind zur Genüge durch die Figur angezeigt.

86. Aufgabe X. Durch einen, außerhalb einer Revolutionsoberfläche gegebenen Punkt eine Ebene zu führen, welche diese Oberfläche in einem gegebenen Meridian berührt.

Man denke sich einen Cylinder, durch eine Gerade erzeugt, welche sich auf dem gegebenen Meridiane bewegt, indem sie zur Ebene desselben stets perpendicular bleibt. In jedem Punkte des Meridians ist die Berührungsebene die nämliche für beide Oberflächen. Denn, die Berührungsebene zur gegebenen Oberfläche enthält die Tangente des Meridians und die Tangente zu einer

Parallele; die Berührungsebene an den Cylinder enthält eine Erzeugende dieses Cylinders, und auch die Tangente des Meridians; nun aber ist die Erzeugende perpendicular zur Ebene des Meridians, mithin nichts Anderes als die Tangente zur Parallele; folglich bilden diese zwei Berührungsebenen nur eine einzige. Es kommt also nur darauf an, durch den gegebenen Punkt Berührungsebenen zum Cylinder zu legen (77). In Folge dessen, ziehe man durch diesen Punkt eine Parallele zu den Erzeugenden des Cylinders; und aus dem Begegnungspunkte derselben, mit der Ebene des Meridians Tangenten zu diesem Meridian; lasse hierauf durch diese Parallele und durch jede der Tangenten Ebenen gehen; so werden diese die gesuchten Berührungsebenen sein.

Es mögen d und d' (Fig. X) die Projectionen des gegebenen Punktes, und aq die Trace der den gegebenen Meridian enthaltenden Verticalebene sein. Die Erzeugenden des Hülfcylinders müssen perpendicular zu dieser Ebene sein, die Projectionen der, durch den gegebenen Punkt zu diesen Erzeugenden gehenden Parallele, sind die Linien dg und $d'g'$, die eine perpendicular zu aq , und die andere parallel zu xy . Der Punkt g ist die Horizontalprojection des Begegnungspunktes dieser Parallele mit der Ebene des Meridians, durch welchen Punkt man Tangenten zu diesem Meridian zu führen hat.

Man drehe diese Ebene um die Revolutionsaxe, damit sie parallel zur Verticalebene werde. Während dieser Bewegung kommt der Punkt g nach e ; und da der Ausgangspunkt der Tangenten seine Höhe nicht ändert, so wird seine Verticalprojection in e' sein, im Begegnungspunkte von $d'g'$ mit der Projectiionslinie ee' . Demnach müssen die verticalen Projectionen der Tangenten die Tangenten $e'b'$ und $e'c'$ sein; und diejenigen der Berührungspunkte b' und c' , woraus man auf die horizontalen Projectionen b und c schließt. Man muß nun den Meridian in seine ursprüngliche Lage zurückführen; und da die Berührungspunkte horizontale Bogen beschreiben, so lassen sich ohne Schwierigkeit die Projectionen er-

langen, welche der wahren Lage dieser Punkte entsprechen. Jene des ersten sind m und m' , und die des zweiten n und n' . Die Berührungsebenen betreffend, so ist ihre Bestimmung ebenfalls leicht, da man die Berührungspunkte kennt; es ist dies die Aufgabe VII (82).

87. Aufgabe XI. Einer gegebenen Geraden parallel, eine Berührungsebene an eine Revolutionsoberfläche für eine gegebene Parallele zu legen.

Man ersetzt hier, wie in der Aufgabe IX (84) die Revolutionsoberfläche durch einen Kegel oder eine Kugel, welche in allen Punkten der gegebenen Parallele dieselben Berührungsebenen haben wie diese Oberfläche.

Erste Auflösung (Fig. XI). Es sei $d'e'$ die Verticalprojection der gegebenen Parallele. Die Tangente $d'p'$ wird die Verticalprojection der Erzeugenden eines geraden Kegels sein, welcher dieselbe Axe wie die Oberfläche, und mit ihr die nämlichen Berührungsebenen in der ganzen Ausdehnung der Parallele, $d'e'$ hat. Es beschränkt sich also die Forderung darauf, Berührungsebenen zu diesem Kegel, der gegebenen Geraden parallel zu führen; und dies wurde bereits in Nr. 81 gezeigt, man dürfe nur zuvörderst durch den Scheitel des Kegels eine Parallele zur gegebenen Geraden ziehen, und hierauf durch die horizontale Trace dieser Parallele, Tangenten zur horizontalen Trace des Kegels. Es kann aber der Scheitel des Kegels weit entfernt sein, man beugt dieser Schwierigkeit dadurch vor, indem man den Kegel, ohne ihn zu drehen, fortgleiten läßt, dergestalt daß sein Scheitel in denjenigen Punkt der Axe zu liegen kommt, welchen man für bequem hält. Nach dieser Fortrückung sind die Berührungsebenen noch parallel zur gegebenen Geraden, und die Erzeugenden der Berührung haben die nämlichen Horizontalprojectionen; aber nun genügt es, diese Projectionen zu kennen, damit das Problem gelöst sei.

Der Scheitel des Kegels komme in den Punkt $[a, a']$ zu liegen. Werden die Geraden af , $a'f'$ beziehentlich

parallel zu xy und $d'p'$ gezogen, so erhält man die Projectionen der Erzeugenden; und stellt man hierauf die horizontale Trace f dieser Erzeugenden dar, so ist die Basis des Kegels der, aus dem Mittelpunkte a mit dem Halbmesser af beschriebene Kreis. Es seien bc und $b'c'$ die Projectionen der gegebenen Geraden, at und $a't'$ diejenigen der durch den Scheitel des Kegels gezogenen Parallele, und t die horizontale Trace derselben. Man ziehe die Tangenten tg und th , oder beschreibe vielmehr auf dem Durchmesser at einen, die Basis dieses Kegels in g und h schneidenden Kreis; hierauf ziehe man die Geraden ag und ah ; diese Geraden werden die Horizontalprojectionen der Erzeugenden sein, darin der Kegel von den, zur gegebenen Geraden parallelen Berührungsebenen berührt wird. Nach dem Obigen enthalten diese Projectionen diejenigen der Berührungspunkte, welche auf der gegebenen Parallele zu bestimmen sind. Nun aber hat diese Parallele zur Horizontalprojection den Kreis ad ; folglich sind die Durchschnitte m und n die Horizontalprojectionen der gesuchten Berührungspunkte, und man folgert hieraus sofort die Verticalprojectionen m' und n' .

Nun kommt es nur noch auf die Bestimmung der Berührungsebenen für diese zwei Punkte an. Den Constructionen der Aufgabe VII (82) folgend, findet man die Ebenen qai' und $r\beta k'$. Gleichwohl kann man auch, um die Tracen dieser Ebenen zu finden, die durch die Berührungspunkte geführten Parallelen zur gegebenen Geraden benutzen; denn die eine dieser Parallelen muß in der ersten, die andere in der zweiten Ebene gelegen sein.

88. Zweite Auflösung (Fig. XI). Mit der Normale $o'd'$ beschreibe man einen Kreis, welcher die Projection eines, in der Verticalebene uv gelegenen Kreises sein wird, und dessen Drehung um die Axe eine Kugel erzeugt, welche die gegebene Oberfläche in der ganzen Ausdehnung der Parallele $d'e'$ berührt. Setzen wir, man hätte zu dieser Kugel alle Berührungsebenen gezogen, welche zur gegebenen Geraden parallel sein können, so

leuchtet ein, daß der Ort aller Berührungspunkte ein, zu dieser Geraden perpendikulärer größter Kreis sein wird, und daß folglich die, dem größten Kreise und der gegebenen Parallele gemeinschaftlichen Punkte, die Berührungspunkte der Revolutionsoberfläche mit den gesuchten Berührungsebenen sind.

Um diese gemeinschaftlichen Punkte leichter zu bestimmen, denke man sich durch irgend einen Punkt der Axe eine Parallele zur gegebenen Geraden, und es seien at und $a't'$ die Projectionen dieser Parallele. Man drehe dieselbe um die Axe bis zum Parallelsein mit der Verticalalebene, dergestalt daß ihre Projectionen $a\Theta$ und $a'\Theta'$ werden. Dann wird sich der größte Kreis, dessen Ebene perpendikulär zur gegebenen Geraden ist, in dem zu $a'\Theta'$ perpendikulären Durchmesser $\lambda'\lambda''$ projiciren, und die ihm und der gegebenen Parallele $d'e'$ gemeinschaftlichen Punkte, erhalten ihre verticalen Projectionen in ε' , und ihre horizontalen in μ und ν . Nach Zurückführung von $a\Theta$ in die Stellung at , nimmt die Sehne $\mu\nu$, die zu at perpendikuläre, und vom Mittelpunkte a gleichweit entfernte Lage mn an; folglich haben die gesuchten Punkte, in ihrer wahren Lage, ihre horizontalen Projectionen in m und n , woraus nachher die verticalen Projectionen m' und n' hervorgehn.

In dieser zweiten Auflösung, ließen sich die Berührungsebenen durch die Bedingung bestimmen, daß sie durch die Berührungspunkte gehen, und perpendikulär zu den Kugelhalbmessern dieser Punkte sein müssen.

89. Aufgabe XII. An eine Revolutionsoberfläche eine Berührungsebene einer gegebenen Geraden parallel zu führen, deren Berührung auf einem gegebenen Meridiane erfolgt.

Man substituire hier, wie in der Aufgabe X für die Revolutionsoberfläche einen, zur Ebene des gegebenen Meridians perpendikulären Cylinder, welcher zur Basis diesen Meridian hat; hierauf suche man die zur gegeb-

nen Geraden parallelen Berührungsebenen des Cylinders. Folglich, und nach dem Inhalte von Nr. 78, ziehe man durch einen Punkt der Geraden eine Parallele zu den Erzeugenden des Cylinders, d. h. ein Perpendikel zur Meridianebene; lege durch diese Parallele und die gegebene Gerade eine Ebene, und bestimme deren Durchschnitt mit der Meridianebene; hierauf führe man an den Meridian, zu diesem Durchschnitte parallele Tangenten; so sind die Berührungspunkte dieser Tangenten, jene der gesuchten Berührungsebenen. Denn man sieht leicht, daß die, in diesen Tangenten, perpendikulär zur Meridianebene errichteten Ebenen, den Bedingungen des Lehrsatzes genügen.

Die gegebene Gerade hat zu Projectionen bc , $b'c'$ (Fig. XII), es leuchtet aber ein, daß man sie durch eine Gerade $[at, a't']$ ersetzen kann, welche zu ihr parallel ist, und durch einen Punkt der Axe geht. Es sei t die horizontale Trace dieser Parallele, und td ein Perpendikel zur horizontalen Trace aq der gegebenen Meridianebene, darin dem Ausgesagten gemäß die Berührungspunkte sich befinden. Die im Raume, den Punkt d mit dem Punkte $[a, a']$ verbindende Gerade, ist diejenige zu welcher, die an diesen Meridian zu ziehenden Tangenten parallel sein müssen; und zu diesem Behufe drehe man noch diese Ebene um die Axe, bis sie endlich parallel zur Verticalebene geworden ist. Dann gelangt der Punkt d nach e , und daher projecirt sich die besprochene Gerade in $a'e'$; wenn man folglich die Tangenten $f'p'$, $g'r'$ parallel zu $a'e'$, hierauf die Geraden $f'f$, $g'g$ perpendikulär zu xy zieht, so werden f und f' , g und g' die Projectionen der Berührungspunkte sein. Es ist aber erforderlich diese Punkte in ihre wahre Lage zu versetzen; deswegen muß man auf aq die Horizontalprojectionen f und g mittelst der Kreisbogen fm und gn übertragen, nachher auf xy die Perpendikel mm' und nn' errichten, und diese durch die Horizontalen $f'm'$ und $g'n'$ begrenzen.

Auf diese Weise findet man die Projectionen m und

m' , n und n' der Berührungspunkte. Hierauf bestimmen sich die Berührungsebenen qai' und spk' leicht, mittelst der Tangenten $f'p'$ und $g'r'$, wie in der Aufgabe VII (82).

90. Aufgabe XIII. Die Projectionen der Curve zu bestimmen, welche durch die Berührungspunkte einer Revolutionsoberfläche mit den verschiedenen Berührungsebenen gebildet wird, die man zu dieser Oberfläche durch einen äußeren Punkt ziehen kann; oder mit anderen Worten, die Berührungscurve einer Revolutionsoberfläche mit einem umschriebenen Kegel zu finden, dessen Scheitel gegeben ist.

Man betrachte eine Folge von Parallelen oder Meridianen, und suche, mittelst der Aufgaben IX und X die Berührungspunkte der Ebenen, welche durch den Scheitel gehn, und die Oberfläche in diesen Parallelen oder Meridianen berühren. Alle diese Berührungspunkte werden zu der gesuchten Curve gehören; und da man sie beliebig vervielfältigen kann, so muß diese Curve als bestimmt angesehen werden.

In Fig. XIII sind d und d' die Projectionen des gegebenen Scheitels, und um die auf der Parallele $b'c'$ gelegenen Berührungspunkte $[m, m']$ und $[n, n']$ zu finden, wird man die in Nr. 84 mitgetheilte Construction wiederholen. Man hat auch die mehrerer bemerkenswerther Punkte näher angegeben, deren Kenntniß das Zeichnen der Projectionen der Curve erleichtert. Unsere Erklärungen werden sich auf den Fall beziehen, wo der Meridian eine Ellipse ist, es wird jedoch leicht sein, dieselben anderen Fällen anzupassen.

1) Um die auf dem Aequator liegenden Punkte zu erhalten, berücksichtige man, daß die zum Meridian durch einen Punkt dieses Kreises geführte Tangente vertical ist, und daß sie beim Drehen um die Axe keinen Kegel, sondern einen Cylinder beschreibt. Hieraus ergibt sich, daß wenn man die Tangenten df , dg zur Projection des

Aequators zieht, und nachher ff' , gg' die Perpendikel zur Projectionsaxe, f und f' , g und g' die Projectionen der fraglichen Punkte sein werden. Ueberdies ist es *a posteriori* klar, dass die, auf df und dg errichteten Verticalebenen mit der Bedingung, durch den Scheitel $[d, d']$ zu gehen, auch noch diese verbinden, dass sie die Oberfläche berühren, die eine im Punkte $[f, f']$, und die andere in $[g, g']$; denn jede derselben enthält eine Tangente zum Aequator und eine zum Meridian.

2) Zieht man in der Verticalebene die Tangenten $d'h'$, $d'i'$, hierauf die Projectionslinien $h'h'$, $i'i'$, so gehören die Punkte $[h, h']$ und $[i, i']$ zur Curve der Berührungen. Denn will man Punkte dieser Curve kennen lernen, welche auf den Parallelen liegen, die durch obere Punkte gehen, und wendet die nämliche Construction (84) wie für die Parallele $b'c'$ an, so ist leicht zu ersehen, dass man diese zwei Punkte selbst findet. Ueberdies bemerkt man sofort; dass die, durch die Geraden $d'h'$ und $d'i'$ perpendicular zur Verticalebene geführten Ebenen, in diesen Punkten berührend zur Curve sind, und durch den gegebenen Scheitel $[d, d']$ gehn.

3) Die auf da errichtete Meridianebene enthält den gegebenen Scheitel und theilt die Curve der Berührungen in zwei symmetrische Hälften. Um die, in dieser Ebene liegenden Punkte der Curve zu erhalten, genügt es, durch den gegebenen Scheitel, Tangenten zu dem in ihr enthaltenen Meridian zu legen; denn die, durch diese Tangenten, perpendicular zur Ebene dieses Meridians geführten Ebenen sind augenscheinlich zur Curve berührend. Um die fraglichen Tangenten zu ziehen, drehe man diese Ebene um die Axe, bis sie zur Verticalebene parallel geworden ist. Es mögen dann δ , δ' die Projectionen des gegebenen Scheitels sein; man ziehe die Tangenten $\delta'k'$, $\delta'l'$; mittelst der Punkte k' und l' bestimme man die Punkte k und l , und führe dieselben durch Kreisbogen nach p und q auf die Linie da ; nachher ziehe man die Projectionslinien pp' und qq' , und begränze diese durch die Horizontalen $k'p'$ und $l'q'$. Man erhält so die

Projectionen p' und p' , q und q' der gesuchten Berührungspunkte.

Diese Punkte bieten Eigenthümlichkeiten dar, auf welche besonders hinzuweisen ist; nämlich der eine ist der höchste, der andere der tiefste Punkt der Berührungcurve. Um diess zu beweisen denke man sich, man wollte die auf die Parallele $b'c'$ bezogenen Constructionen, auf Parallelen anwenden, welche über dem Punkte k' oder unter dem Punkte l' liegen. Dann wird die an b' gezogene, und diesseits des Punktes δ' gelegene Tangente $b'e'$ durch eine jenseits desselben gelegene ersetzt. Der Kreis ae also, welcher durch seine Durchschnitte r und s , mit dem, auf da beschriebenen Kreis zur Bestimmung der Punkte m und n dient, ist durch einen, den Kreis ad einschliessenden, und keinen Punkt mit ihm gemein habenden Kreis ersetzt. Man kann folglich durch den Scheitel $[d, d']$ keine Berührungsebene führen, deren Berührungspunkt mit der Oberfläche über p' oder unter q' liegt.

Kommen wir auf einen Augenblick zu den, auf der Parallele $b'c'$ bestimmten Punkten zurück. Die durch diese Punkte gehende Horizontale hat mn zur Horizontalprojection, und wird zur Berührungcurve tangirend, sobald sich diese Punkte m und n in einem einzigen vereinigen. Nun aber ereignet sich dieser Fall, wenn die Punkte r und s mit d zusammenfallen, wozu gehört, dass die Tangente $b'e'$ auf $k'\delta'$ oder auf $l'\delta'$ zu liegen kommt. Man gelangt also noch zu den äussersten Punkten p' und q' , indem man jene sucht, für welche die Tangente zur Berührungcurve horizontal ist.

Bemerkung. In jeder der Projectionen der Berührungcurve hat man zwei Theile zu unterscheiden, deren einer voll und der andere punktirt ist, je nach der Gegend der Oberfläche zu welcher er gehört. In der Horizontalprojection entspricht der volle Theil fpg dem ober- und der punktirete fpg dem unterhalb des Aequators gelegenen Theile der Curve. In der Verticalprojection entspricht die volle Linie $h'g'i'$ dem auf der vorderen die

punktirete $h'f'i'$ dem auf der hinteren Seite des Meridians liegenden Curventheile.

91. Aufgabe XIV. Die Projectionen der Curve zu finden, welche durch die Berührungspunkte aller, an eine Revolutionsoberfläche, einer gegebenen Geraden parallel, geführten Berührungsebenen, gebildet wird; oder mit anderen Worten, die Berührungscurve dieser Oberfläche mit einem umschriebenen Cylinder zu bestimmen, dessen Erzeugenden einer gegebenen Geraden parallel sind.

Man nehme eine Folge von Parallelen oder Meridianen; suche hierauf mittelst bekannter Constructionen (87—89), für jede dieser Parallelen oder jeden der Meridiane, die Berührungspunkte der Revolutionsoberfläche mit den zur gegebenen Geraden parallelen Berührungsebenen. Die, alle diese Punkte verbindende Linie, ist die gesuchte Curve.

In der Darstellung XIV sind bc und $b'c'$ die Projectionen der gegebenen Geraden, und man hat die Construction der Nr. 87 auf die Parallele $d'e'$ angewendet. Man hat also die Projectionen m und n , m' und n' zweier Punkte der Curve bestimmt.

Um die, auf dem Aequator gelegenen Punkte zu erhalten, ziehe man zu bc parallel, Tangenten zur Horizontalprojection dieses Aequators; man findet so Punkte f und g , welche die horizontalen Projectionen der fraglichen Punkte sind, woraus man auf ihre verticalen Projectionen f' und g' schließt.

Durch das Ziehen der zu $b'c'$ parallelen Tangenten findet man die Punkte h' und i' , und leitet hieraus die Punkte h und i ab. $[h, h']$ und $[i, i']$, sind diejenigen Punkte darin die Berührungscurve dem, zur Verticalebene parallelen Meridiane begegnet.

Um endlich Punkte dieser Curve, welche auf dem, zur gegebenen Geraden parallelen Meridiane liegen, ken-

nen zu lernen, genügt es Tangenten zu diesem Meridian, der gegebenen Geraden parallel, zu führen. Zu diesem Behuf, ziehe man durch einen Punkt der Axe eine Parallele $[at, a'l']$ zur Geraden; und da diese Parallele in der Ebene desjenigen Meridians liegt, um welchen es sich handelt, so mache man diese Ebene parallel zur Verticalebene, suche die verticale Projection $a'\theta'$ dieser Parallele in ihrer neuen Lage, und ziehe parallele Tangenten zu $a'\theta'$. Diese Tangenten bestimmen die Punkte k' und l' , und folglich k und l . Um dann die Projectionen der gesuchten Punkte in ihrer wahren Lage zu erhalten, beschreibe man die Bogen kp und lq , ziehe hierauf die Projectionslinien pp' und qq' , und begränze dieselben durch die Horizontalen $k'p'$ und $l'q'$. Von diesen zwei bestimmten Punkten $[p, p']$ und $[q, q']$ ist der eine der höchste, und der andere der tiefste Punkt der Berührungcurve. In diesen Punkten sind die Tangenten zu dieser Curve horizontal.

92. Aufgabe XV. Durch eine gegebene Gerade eine Berührungsebene an eine Revolutionsoberfläche zu ziehen.

Nach den zwei vorigen Aufgaben, bietet diese keinerlei Schwierigkeit dar. Man nehme auf der gegebenen Geraden einen beliebigen Punkt, und bestimme die Berührungcurve der Oberfläche mit dem umschriebenen Kegel, welcher diesen Punkt zum Scheitel hat (90). Man sieht, daß die durch die Gerade, zur Oberfläche geführten Berührungsebenen, berührend zu diesem Kegel sein müssen; folglich liegen ihre Berührungspunkte mit der Revolutionsoberfläche auf der Berührungcurve. Indem man einen zweiten Punkt auf der gegebenen Geraden nimmt, so bestimmt man eine zweite, diese Punkte auch noch enthaltende Curve; folglich liegen diese Punkte in den Durchschnitten beider Curven.

Wie immer auch auf der gegebenen Geraden Punkte zu Scheiteln der Kegel gewählt werden mögen, stets vollzieht man die Constructionen der Aufgabe XIII ge-

mäfs. Man kann aber auch einen der zwei Kegel durch einen, die Oberfläche umschreibenden, und zur gegebenen Geraden parallelen Cylinder ersetzen; und dann bestimmt sich die Berührungscurve nach der Aufgabe XIV.

Im Rifs XV, sind bc und $b'c'$ die Projectionen der gegebenen Geraden, den Punkt $[c, c']$ hat man zum Scheitel des umschriebenen Kegels gewählt, und gefunden, daß die Projectionen der Berührungscurve $dmen$, $f'm'g'n'$ sind. Die zweite Curve ist diejenige der Berührung eines umschriebenen, zur Geraden parallelen Cylinders; die Projectionen dieser Curve sind $hmin$, $k'm'l'n'$; endlich hat man zur Vermeidung jeder Verirrung durch rund punktirte Linien, alle jene Constructionslinien ausgedrückt, welche zur Bestimmung dieser letzteren Curvenprojectionen dienen.

Auch hat man, um dem Leser zu Hülfe zu kommen, durch Punktirung die Theile der Curven unterschieden, welche zu verschiedenen Gegenden der Oberfläche gehören; und durch dieses Mittel verschwindet jede Unge-
wifsheit, will man unter den verschiedenen Durchschnitten der Projectionen diejenigen Punkte erkennen, welche den Durchschnitten der Curven auf der Oberfläche entsprechen. So z. B. muß der Punkt m von einem wirklichen Durchschnitte herrühren, weil er die Begegnung der horizontalen Projectionen zweier, unterhalb des Aequators gelegenen Curvenstücke ist. Es ergibt sich also, daß es auf der Oberfläche zwei Durchschnittspunkte giebt; der eine hat m und m' zu Projectionen, der andere n und n' .

ras' ist die Berührungsebene im Punkte $[m, m']$. Ihre Trace $r\alpha$ ist zur Geraden am perpendicular, und geht durch den Punkt r , daselbst die gegebene Gerade die Horizontalebene durchdringt; und um ihre verticale Trace $\alpha s'$ zu erhalten, bediene man sich der, durch den Berührungspunkt zu r gehenden Parallele $[ms, m's']$. Die Tracen der zweiten Berührungsebene bestimmen sich auf

dieselbe Art, die verticale Trace aber, überschreitet die Gränzen des Ramens.

Anmerkung. Die hier erklärte Auflösung ist nicht die einzige anwendbare. Ueberhaupt, was immer für eine Oberfläche es sei, wozu man eine Berührungsebene durch eine gegebene Gerade verlangt, stets beschränkt sich die Forderung darauf, auf dieser Oberfläche einen Punkt zu finden, durch welchen man zwei, die Gerade schneidende Tangenten ziehen kann. Denkt man sich folglich zwei verschiedene Oberflächen, eine jede durch eine Gerade erzeugt, welche genöthiget wird, stets die gegebene Gerade zu treffen, und die erwähnte Oberfläche zu berühren; so werden die Punkte, welche den zwei Curven gemein sind, darin jene Oberflächen diese Oberfläche berühren, die fraglichen Berührungspunkte sein.

Ueberdies leuchtet völlig ein, daß das Gesetz, wornach die Erzeugende der zwei umschriebenen Oberflächen sich bewegt, höchst mannigfaltig sein kann, ohne daß diese Erzeugende aufhört, die gegebene Gerade zu treffen und berührend zu der vorliegenden Oberfläche zu sein. Geht sie stets durch den nämlichen Punkt dieser Geraden, so erzeugt sie einen Kegel; und liegt dieser Punkt unendlich weit, einen Cylinder. Man kann auch noch die in Rede stehende Oberfläche durch eine Folge von horizontalen Ebenen schneiden, und aus den Durchschnittspunkten dieser Ebenen mit der gegebenen Geraden Tangenten ziehen, wodurch ein Conoid bestimmt wird. Indem, einem anderen Gesetze folgende Ebenen genommen werden, erhält man andere Oberflächen.

Das so eben Vorgetragene läßt sich auf jede Oberfläche anwenden (vorausgesetzt jedoch, daß sie nicht developpabel sei). Handelt es sich um eine Revolutionsoberfläche von verticaler Axe, so sind die horizontalen Durchschnitte Kreise, an welche es leicht sein wird, durch die Durchschnittspunkte dieser Ebenen mit der gegebenen Geraden Tangenten zu ziehen; und man erhält so eine erste Curve. Um eine zweite zu finden, könnte man,

zur Verticalebene parallele Durchschnitte hervorbringen; man müßte aber dann die, aus diesen verschiedenen Durchschnitten entstehenden Curven construiren, was zu umständlich ist. Besser ist es, die schneidenden Ebenen durch die Axe zu legen, weil sie dann alle die Oberfläche in Meridianen schneiden; man führe durch den Durchschnittpunkt einer jeden Ebene mit der gegebenen Geraden, Tangenten zu dem in ihr enthaltenen Meridiane; und ist die neue Berührungscurve construirt, so geben ihre Durchschnitte mit der ersten die Auflösung des Problems.

Berührungsebene an die Kugel durch eine gegebene Gerade.

93. Aufgabe XVI. Durch eine gegebene Gerade eine Berührungsebene an eine Kugel zu legen.

Es werden vier Auflösungen zur Erklärung kommen. Größerer Einfachheit wegen wird angenommen, daß die Projectionensaxe durch den Mittelpunkt der Kugel geht, dergestalt, daß die Durchschnitte dieser Kugel mit den Projectionsebenen zwei größte Kreise sind, welche im Risse in einem einzigen zusammen fallen.

Erste Auflösung (Fig. XVI — 1). Die Forderung beschränkt sich darauf die Berührungspunkte zu finden, und man gelangt zu denselben vermittelst zweier Kegel, wie solches Anfangs der Nr. 92 erklärt wurde; man wählt aber als Scheitel dieser Kegel die Tracen selbst, der Geraden. Man denke sich durch ihre horizontale Trace zwei Tangenten zu dem, in der Horizontalebene liegenden größten Kreise; hierauf drehe man dieselben um jene Gerade, welche den Mittelpunkt mit dem Ausgangspunkte dieser Tangenten vereinigt. Es leuchtet ein, daß dieselben einen geraden Kegel beschreiben, welcher die Kugel in einem Kreise berührt, dessen Ebene vertical, und dessen Durchmesser die, zwischen den zwei

Berührungspunkten gezogene Sehne ist. Eben so denke man sich, man hätte durch die verticale Trace der Geraden zwei Tangenten zu dem, in der Verticalebene liegenden größten Kreise gezogen, und eine Gerade nach dem Mittelpunkte; die Drehung der Tangenten um diese letztere Gerade erzeugt einen anderen Kegel; und dieser Kegel berührt noch die Kugel in einem Kreise, dessen Ebene perpendicular zur Verticalebene ist, und welcher die, zwischen beiden Berührungspunkten geführte Sehne zum Durchmesser hat. Diese zwei Kreise, welche die Basen der Kegel heißen mögen, müssen die Berührungspunkte der gesuchten Berührungsebenen enthalten, so daß man demnach ihre Durchschnitte zu bestimmen hat. Zu diesem Zwecke, suche man dann die Gerade, in welcher sich die Ebenen dieser Kreise schneiden, und hierauf die Punkte darin diese Gerade einem derselben begegnet. Diese Constructionen erfordern, daß man sich mit einer Umklappung behilft.

Es seien ab und $a'b'$ die Projectionen der gegebenen Geraden, a und b' deren Tracen; man ziehe die Tangenten, welche die Sehnen cd und $c'd'$ bestimmen. Der auf cd in einer zur Horizontalebene perpendicularen Ebene beschriebene Kreis, ist die Basis des, seinen Scheitel in a habenden Kegels; und der auf $c'd'$ in einer, zur Verticalebene perpendicularen Ebene beschriebene Kreis, die Basis des Kegels, welcher seinen Scheitel in b' hat. Es ist folglich klar, daß die Horizontalprojectionen der gesuchten Punkte auf cd , und die Verticalprojectionen auf $c'd'$ zu suchen sein werden; so daß man ferner, die Linien cd und $c'd'$ als die Projectionen der Sehne ansehen kann, welche diese Punkte im Raume vereinigt.

Man klappe die Basis des zweiten Kegels auf die Verticalebene um; hierzu genügt es, den Kreis $c'Md'N$ über dem Durchmesser $c'd'$ zu beschreiben. Um die Lage zu erhalten, welche dann die fragliche Sehne einnimmt, ermittle man die Punkte e und f daselbst sie die Projectionsebenen durchdringt, und bemerke, daß nach der

Umklappung, der Punkt f' sich nicht verändert hat, und daß der Punkt e perpendicular zu $c'd'$ zu liegen kommt, in einer Entfernung $e'E$ gleich $e'e$; indem man folglich durch die Punkte f' und E eine Gerade zieht, so erhält man die Umklappung der Sehne. Diese Gerade schneidet den Kreis $c'Md'N$ in den Punkten M und N , welche die Umklappungen der gesuchten Punkte sind; wenn man nun diesen Kreis in seine wahre Lage zurückführt, so werden die, auf $c'd'$ gefällten Perpendikel Mm' , Nn' perpendicular zur Verticalebene werden; folglich sind die Punkte m' und n' die Verticalprojectionen der gesuchten Punkte. Man findet hierauf die Horizontalprojectionen m und n mittelst der durch ad zu begränzenden Projectionslinien mm' und nn' . Als Bestätigung muß man erhalten $\alpha m = Mm'$ und $\beta n = Nn'$.

Es erübriget noch, die Tracen der zwei Berührungsebenen zu ziehen; was ein Leichtes ist, denn jede derselben geht durch die gegebene Gerade, und ist perpendicular zum Halbmesser des Berührungspunktes. In Folge dessen, fälle man ap , $b'p'$ perpendicular zu den Projectionen om , om' des ersten Halbmessers, und man erhält die Tracen der ersten Berührungsebene, welche die Projectionenaxe im nämlichen Punkte schneiden müssen. Desgleichen fälle man, auf die Projectionen on , on' des zweiten Halbmessers die Perpendikel aq , $b'q'$, welche die Tracen der zweiten Berührungsebene sind.

94. Zweite Auflösung (dieselbe Figur). Anstatt des Kegels acd kann man einen Cylinder anwenden. Hierzu lege man durch den Mittelpunkt der Kugel perpendicular zur gegebenen Geraden eine Ebene tot' , und sehe hierauf den größten Kreis des Durchschnits, als die Basis eines, zur gegebenen Geraden parallelen Cylinders an. Man sieht leicht, daß die gesuchten Durchschnitspunkte auf dem größten Kreise liegen müssen, und daß folglich der Durchschnitt der Ebene tot' mit der Ebene der Basis des Kegels $b'c'd'$ die, beide Berührungspunkte verbindende Sehne sein wird. Die verticale Projection

dieses Durchschnitts ist bereits $c'd'$, und seine horizontale cd leicht zu finden (19). Hierauf bewirke man die Umklappung $c'Md'N$ der Basis des Kegels, und vollende die Constructionen wie vorhin. Da die Ebene tot' die Sehne enthält, welche die gesuchten Berührungspunkte verbindet, so folgt, daß die Tracen ot und ot' durch die, in der ersten Auflösung bestimmten Punkte e und f' gehen müssen, weil sie diejenigen sind, darin diese Sehne den Projectionsebenen begegnet.

95. Dritte Auflösung (Fig. XVI—2). Einer der Kegel genügt für sich allein zur Auflösung dieser Aufgabe. Denn, sucht man den Begegnungspunkt der Geraden mit der Ebene der Basis dieses Kegels, und führt durch diesen Punkt Tangenten zu dieser Basis, so sind die, durch die gegebene Gerade und durch diese Tangenten geführten Ebenen, berührend zum Kegel und der Kugel, und darum die gesuchten Ebenen.

Bedienen wir uns des Kegels $b'c'd'$, dessen Basis in einer, durch $c'd'$ perpendicularär zur Verticalebene errichteten Ebene liegt. Verlängert man $a'b'$ und $c'd'$, so wird der Durchschnitt g' die Verticalprojection des Begegnungspunkts der Geraden mit der Ebene des Kreises sein; und man erhält seine Horizontalprojection im Durchschnitt g von ab , mit der, zu xy perpendicularären $g\lambda$. Man sieht folglich, daß die Begegnung der Geraden mit der Ebene im Raume auf einer Horizontalen statt findet, welche durch g' geht, und deren Gröfse von g' aus, gleich $g\lambda$ ist. Wird daher die Basis des Kegels auf die Verticalebene umgeklappt, so überträgt sich dieser Punkt auf ein Perpendikel zu $c'd'$, in einer Entfernung $g'G = g\lambda$; und die, von diesem Punkte zur Basis des Kegels gezogenen Tangenten werden sich auf die Tangenten GM , GN umklappen. Nun fälle man wie oben, die Perpendikel Mn' , Nn' zu $c'd'$, und hierauf Perpendikel zu xy , auf welchen man $\alpha m = Mm'$, und $\beta n = Nn'$ nimmt, so sind m , m' und n , n' die Projectionen der gesuchten Berührungspunkte.

Indem man durch die Punkte a und b' Perpendikel zu den Projectionen der Halbmesser zieht, so ergeben sich die Tracen der Berührungsebenen. Hierbei ist aber zu beachten, daß wenn man die Tangenten GM und GN bis zu ihren Begegnungspunkten r und s mit $c'd'$ verlängert, diese Punkte sich nicht verändern dürfen, sobald die Tangenten ihre wahre Lage annehmen, und daß sie folglich zu den verticalen Tracen der Berührungsebenen gehören; d. h. die Trace $b'p'$ muß durch r und die Trace $b'q'$ durch s gehen.

96. Vierte Auflösung (die nämliche Figur). Endlich genügt auch die Anwendung des zur gegebenen Geraden parallelen Cylinders, oder vielmehr des größten Kreises, dessen Ebene perpendicular zu dieser Geraden ist, um die Aufgabe zu lösen. Man muß dann den Begegnungspunkt dieser Ebene mit der Geraden bestimmen, und durch diesen Punkt zwei Tangenten zu diesem größten Kreise führen; durch sie werden die Berührungspunkte bekannt; und indem man durch die gegebene Gerade und durch diese Tangenten Ebenen legt, so sind solche die Berührungsebenen.

Man kann, auf die Elementar-Geometrie sich stützend, *a posteriori* beweisen, daß jede dieser Ebenen berührend zur Kugel ist. Der Abkürzung wegen bezeichnen wir sie durch T und T' , und die Ebene des größten Kreises mit C . Da die Ebene T die gegebene Gerade enthält, so muß sie perpendicular zur Ebene C sein; und da sie eine Tangente zum größten Kreis enthält; so leuchtet ein, daß diese Tangente der Durchschnitt der Ebenen T und C ist. Nun aber ist der, zum Berührungspunkt gezogene Halbmesser, in der Ebene C , perpendicular zu dieser Tangente; folglich ist der Halbmesser perpendicular zur Ebene T ; folglich die Ebene T berührend zur Kugel. Dieselbe Schlussfolge gilt für die Ebene T' .

Nun folgen hier die Constructionen. Man lege durch den Mittelpunkt perpendicular zu ab und $a'b'$ die Linien

ot und ot' , welche die Tracen der zur gegebenen Geraden perpendicularen Ebene sein werden; man bestimme die Projectionen h und h' des Durchschnittspunkts der Geraden mit der Ebene; suche die Entfernung dieses Punktes vom Punkte t , mittelst des rechtwinkligen Dreiecks thv , dessen Basis th , und Höhe $h'\mu$ ist; hierauf drehe man die Ebene tot' um ihre Trace ot , um sie auf die Horizontalebene zu klappen. Dann fällt der, in der Ebene Aot' liegende größte Kreis mit dem schon in der Horizontalebene gezogenen zusammen; und da anderer Seits, der Punkt $[h, h']$ auf einer, in h errichteten Verticale liegt, und ht perpendicular zu ot ist, so leuchtet ein, dass die Gerade tv im Raume, perpendicular zu ot ist (Einleitung 19). Es folgt hieraus, dass man die Umklappung des Punktes $[h, h']$ erhält, indem man $tH=tv$ auf der Verlängerung von ht nimmt, und die, in diesem Punkt entspringenden Tangenten, zum größten Kreis, in dem man die Tangenten HM' , HN' zieht.

Bringen wir Alles auf seinen gehörigen Stand zurück, ein jedes Stück an seinen früheren Ort, d. h. führen diese Tangenten in diejenige Lage, welche sie vor der Umklappung in der Ebene tot' einnahmen. Die Tangente HM' begegnet der Trace ot in einem Punkte i welcher sich nicht verändert; folglich wird ih die horizontale Projection dieser Tangente sein. Wird nun ii' perpendicular zu xy gefällt und $i'h'$ gezogen, so erhält man ihre verticale Projection. Man kennt also schon die Projectionen einer Geraden, welche einen der Berührungspunkte enthält. Der Punkt M' aber, bleibt während der Umdrehung in einer, zu ot perpendicularen Ebene, und folglich liegt seine Horizontalprojection auf dem Perpendikel $M'm$ zu ot ; folglich findet sich die Horizontalprojection des ersten Berührungspunktes in dem Durchschnitte von $M'm$ mit ih , und daher liegt seine Verticalprojection im Durchschnitte von $i'h'$ mit der Projectionslinie mm' . Auf dieselbe Weise erhält man die Projectionen hk , $h'k'$ der

zweiten Tangente, und hierauf die Projectionen n, n' des zweiten Berührungspunktes.

Die Sehne $M'N'$ veranlaßt eine Bestätigung. Ist sie in ihre wahre Lage zurückgebracht, so sind ihre Projectionen mn und $m'n'$. Aber da der Punkt e , daselbst sie ot schneidet, fest bleibt, so ist er die horizontale Trace derjenigen Sehne, welche die Berührungspunkte verbindet; folglich muß er auf der Linie mn liegen, und seine Verticalprojection e' auf $m'n'$.

Uebrigens bestimmen sich die Tracen der Berührungsebenen wie in den andern Auflösungen. Aber hier beachte man, daß die zwei Tangenten die Horizontalebene in i und k , auf der Trace ot treffen, und die horizontalen Tracen der Berührungsebenen beziehentlich durch i und k gehen müssen. Eben so müssen die Punkte, daselbst die Tangenten der Verticalebene begegnen, zugleich auf ot' und auf den verticalen Tracen der Berührungsebenen gelegen sein; aus diesem Grunde durchkreuzen sich die Linien $i'h', ot', by$ im nämlichen Punkte.

Berührungsebenen an die windschiefe Revolutionsoberfläche.

97. Aufgabe XVII. Die Axe und die Erzeugende einer windschiefen Revolutionsoberfläche sind gegeben, es soll eine Berührungsebene an einen Punkt dieser Oberfläche gelegt werden.

In dieser Aufgabe und in den folgenden ist es nicht mehr ein Meridian der Oberfläche welcher gegeben wird; vielmehr muß man zur Bestimmung der Berührungsebene die gerade Erzeugende benutzen. Hieraus gehen einige Modificationen in Betreff der, im Vorigen (82 — 92) aufgestellten Constructionen hervor. Man wird fortfahren die Horizontalebene perpendicular zur Axe zu nehmen, und stets bedingen, daß die Erzeugende in der, zur Verticalebene parallelen Lage gegeben ist.

Es seien a (Fig. XVII) die Horizontalprojection der Axe, $a'a''$ ihre Verticalprojection, und bc , $b'c'$ die Projectionen der Erzeugenden. Man sieht leicht ein, daß bc parallel zu xy sein muß, daß das auf bc gefällte Perpendikel ab die kürzeste Entfernung zwischen der Erzeugenden und der Axe ist, und der mit dem Halbmesser ab beschriebene Kreis bde die Horizontalprojection des Kehlkreises. Dessen Verticalprojection betreffend, so befindet sie sich auf der, durch den Durchschnitt b' von $a'a''$ mit $b'c'$ zu xy geführten Parallele.

Die Horizontalebene schneidet die Oberfläche in einem, a zum Mittelpunkt habenden Kreise; bestimmt man die horizontale Trace c der Erzeugenden, so ergibt sich dadurch ein Punkt dieses Kreises; folglich kann man ihn beschreiben; es ist dieß der Kreis cfg . Alle Erzeugenden der Oberfläche haben ihre Tracen auf cfg .

Es sei m die Horizontalprojection eines Punktes der Oberfläche. Alle Erzeugenden müssen sich auf der Horizontalebene berührend zum Kreis bde (64) projeciren; führt man folglich die Tangenten md und me zum Kreis bde , so werden diese die Horizontalprojectionen der Erzeugenden sein, welche auf der Oberfläche durch in m projecirten Punkte geh'n.

Um die Verticalprojectionen dieser Erzeugenden zu erhalten, bemerke man zuvörderst, daß die Punkte d und e die Horizontalprojectionen der Punkte sind, wo diese Erzeugenden dem Kehlkreise begegnen, und daß sich folglich die Verticalprojectionen d' und e' ergeben, indem man dd' und ee' perpendicular zu xy zieht. Zweitens berücksichtige man, daß die horizontalen Tracen der nämlichen Erzeugenden, in den Durchschnitten d und g des Kreises cfg mit diesen zwei Tangenten liegen müssen. Dennoch muß man, um sich in der wahren Lage dieser Tracen nicht zu irren, die Bewegung der Erzeugenden verfolgen, während sie die Oberfläche erzeugt, und so erkennt man, daß während der Berührungspunkt b nach d und e gelangt, der Punkt c sich nach f und

g versetzt. Projiciret man f und g nach f' und g' auf xy , und zieht hierauf die Geraden $f'd'$ und $g'e'$, so werden diese die Verticalprojectionen zweier Erzeugenden sein; zieht man folglich durch den Punkt m ein Perpendikel zu xy , so müssen die Punkte m' und m'' , wo solches $f'd'$ und $g'e'$ trifft, die Verticalprojectionen derjenigen Punkte der Oberfläche sein, welche der Horizontalprojection m entsprechen.

Die Berührungsebene an jeden dieser zwei Punkte ist leicht zu bestimmen; denn sie muß die Erzeugende und die Tangente zu der, durch den Berührungspunkt gehenden Parallele enthalten. Die zu am perpendikuläre Gerade mp ist die Horizontalprojection der Tangenten zweier Parallelen; die zu xy parallelen Geraden $m'p'$ und $m''p''$ sind die Verticalprojectionen dieser Tangenten, und folglich p' und p'' deren verticale Tracen. Nun aber müssen die horizontalen Tracen der Berührungsebenen durch die Punkte f und g gehen, und diesen Tangenten parallel sein; zieht man daher die Parallelen $f\alpha$ und $g\beta$, desgleichen $\alpha p'$ und $\beta p''$, so müssen $f\alpha p'$ und $g\beta p''$ die Berührungsebenen sein.

Bemerkungen. Man nehme wahr, daß die verticalen Tracen der zwei Erzeugenden beziehentlich auf den Tracen αp , $\beta p''$ liegen müssen, und daß die in de , $d'e'$ projicirte Gerade den zwei Berührungsebenen gemein ist, und folglich ihre verticale Trace o' den verticalen Tracen dieser Ebenen auch gemein.

Andere sehr bemerkenswerthe Bestätigungen ergeben sich dadurch, daß die Oberfläche auf zweierlei Weise durch eine Gerade entstehen kann (65). Verlängert man cb bis nach h' , so ist die, h zur horizontalen Trace habende, und dem Kehlkreise im Punkte $[b, b']$ begegnende Gerade, die Erzeugende der zweiten Art. Man sieht dann, daß die Drehung dieser Erzeugenden, hb nach ie versetzt, und folgert hieraus die Verticalprojection $i'e'$, welche durch den Punkt m' gehen muß. Kommt eben so

hb nach kd , so ist seine entsprechende Verticalprojection $k'd'$, deren Verlängerung durch m'' gehen muß.

Hätte man die Erzeugenden der beiden Arten erst gesucht, welche durch einen jeden Berührungspunkt gehen, so ist es vermöge Nr. 15 klar, daß dieselben zur Bestimmung der zwei Berührungsebenen genügen.

98. Aufgabe XVIII. Durch einen außerhalb einer windschiefen Revolutionsoberfläche gegebenen Punkt, eine Ebene zu führen, welche diese Oberfläche in einem Meridiane, oder in einer Parallele berührt, deren Ebene gegeben ist.

Angenommen, die Berührung soll auf einem Meridiane stattfinden, dessen Ebene gegeben ist. Die Constructionen gründen sich darauf, daß die Berührungsebene gleichzeitig zur gegebenen Ebene perpendicular sein, und eine Erzeugende der Oberfläche enthalten muß.

Es seien ad (Fig. XVIII) die Trace der Meridianebene, und o, o' die Projectionen des gegebenen Punktes. Da die Berührungsebene perpendicular zur Meridianebene sein muß, so wird ihre horizontale Trace perpendicular zu ad sein; und denkt man sich daher, daß eine horizontale Ebene durch den Punkt $[o, o']$ geführt werde, so wird der Durchschnitt dieser Ebene mit der Berührungsebene das Perpendikel oe zu ad , und die Parallele $o'e'$ zu xy zu seinen Projectionen haben; es gehört also die Gerade $[oe, o'e']$ zur Berührungsebene. Folglich liegt der Durchgangspunkt e' derselben mit der Verticalebene, auf der verticalen Trace dieser Ebene.

Die nämliche horizontale Ebene schneidet die windschiefe Oberfläche in einem Kreise, dessen Horizontalprojection fgh sich leicht bestimmt, indem man den Durchschnittspunkt $[f, f']$ desselben mit der gegebenen Erzeugenden $[bc, b'c']$ sucht; dieser Kreis wird durch die Gerade $[oe, o'e']$ in zwei Punkten $[g, g']$ und $[h, h']$ geschnitten. Es muß aber die Berührungsebene eine Erzeugende der Oberfläche enthalten, und diese Erzeugende dem in

fg projecirten Kreise begegnen; führt man daher die Tangenten gi und hk zur Projection des Kehlkreises, so erhält man die Projectionen der zwei Erzeugenden, davon eine jede in einer Berührungsebene liegt, welche der Forderung genügen muß. Man betrachte für einen Augenblick die Erzeugenden, welche zur nämlichen Erzeugungsart wie $[bc, b'c']$ gehören.

Da alle diese Erzeugenden der Horizontalebene auf einem bekannten Umkreise cpq begegnen, so verlängere man gi und hk bis nach p und q , und man kennt so einen Punkt der horizontalen Trace einer jeden Berührungsebene. Dann schließt man, daß, indem man $p\alpha$ und $q\beta$ parallel zu oe und die Geraden $\alpha e'$ und $\beta e'$ zieht, die gesuchten Berührungsebenen $p\alpha e'$ und $q\beta e'$ sein werden.

Noch sind die Berührungspunkte nicht bestimmt, aber es wird dies leicht sein, wenn man die Erzeugenden der zweiten Art darstellt, welche beziehentlich zu den zwei Berührungsebenen gehören müssen. Die Tangente hl ist die Horizontalprojection derjenigen, welche zur Ebene $p\alpha e'$ gehört, und sie muß die Trace $p\alpha$ und den Kreis cpq im nämlichen Punkte r treffen; die Tangente gm ist die Horizontalprojection der, in der Ebene $q\beta e'$ liegenden Erzeugenden, und muß durch den, dem Kreise cpq und der Trace $q\beta$ gemeinschaftlichen Punkt s gehen. Entwirft man nun die, den pi, rl, qk, sm , entsprechenden Verticalprojectionen $p'i', r'l', q'k', s'm'$, so leuchtet ein, daß die Berührungspunkte der Ebenen $p\alpha e', q\beta e'$ bestimmt sein werden, der eine durch die Begegnung der Geraden $[pi, p'i']$ und $[rl, r'l']$, und der andere durch die der Geraden $[qk, q'k']$ und $[sm, s'm']$. Die Projectionen der ersten fallen außerhalb der Figur, diejenigen des zweiten sind n und n' .

Einige Bestätigungen bieten sich von selbst dar, und sind zur Genüge auf dem Risse angezeigt.

99. Soll die Berührung auf einer gegebenen Parallele statt finden, so ist die Lösung der Aufgabe sehr einfach. Dieselbe beschränkt sich darauf, eine Berührungsebene

zur Oberfläche an irgend einen Punkt dieser Parallele zu führen, und den Meridian dieses Punktes, so wie die, zu ihm perpendikuläre Berührungsebene zu drehen, bis diese Berührungsebene durch den gegebenen Punkt geht. Die Constructionen enthalten keinerlei Schwierigkeit, und es wird dem Leser deren Entwicklung überlassen.

100. Aufgabe XIX. An eine windschiefe Revolutionsoberfläche eine Berührungsebene, einer gegebenen Ebene parallel, zu führen.

Ist die Erzeugende einer Revolutionsoberfläche kein Meridian, und kommt es darauf an, eine Berührungsebene zu dieser Oberfläche einer gegebenen Ebene parallel zu führen, so muß man im Allgemeinen zuvor, mittelst der in der dritten Abtheilung erklärten Methoden, einen Meridian der Oberfläche bestimmen, gemäß welchen die Constructionen der Nr. 83 ihre Anwendung erhalten können. Im besonderen Falle der windschiefen Revolutionsoberfläche aber ist, wie wir dies sehen werden, diese Bestimmung unnütz.

Alsdann muß jede Berührungsebene, wegen den zwei Arten der Entstehung, welchen die Oberfläche fähig ist, zwei Erzeugende dieser Oberfläche enthalten. Nun aber weiß man (68) dafs, indem man auf den Mittelpunkt des Krehlkreises, alle Erzeugenden der Oberfläche parallel zu sich selbst überträgt, dieselben einen geraden Kegel von kreisförmiger Basis bilden, welcher dieselbe Axe wie die Oberfläche hat. Hieraus folgert man, dafs eine, durch den Scheitel dieses Kegels, parallel zur gegebenen Ebene geführte Ebene, diesen Kegel in zwei, beziehentlich zu den, durch den Berührungspunkt gehenden Erzeugenden, parallelen Geraden schneiden muß; und nun sind diese Erzeugenden leicht zu bestimmen.

Es mögen (Fig. XIX) dad' die gegebene Ebene, und bc , $b'c'$ die Projectionen der Erzeugenden der Oberfläche sein. Führt man ae parallel zu bc , so werden die Geraden ae , $b'c'$ die Projectionen einer Parallele zu dieser Er-

zeugenden sein. Da diese Parallele durch den Mittelpunkt des Krehlkreises geht, so beschreibt sie während der Umdrehung um die Axe den asymptoten Kegel, dessen Erzeugenden parallel, zu denen der windschiefen Oberfläche sind (68). Stellt man ihre horizontale Trace e dar, und beschreibt aus dem Mittelpunkt a den durch e gehenden Kreis, so erhält man die Basis des Kegels auf der Horizontalebene.

Nun ist es erforderlich durch den Scheitel des Kegels eine, zur Ebene $d\alpha d'$ parallele Ebene zu führen; zu diesem Behufe lege man durch den Scheitel eine Horizontale $[af, b'f']$ parallel zur Trace $d\alpha$, stelle ihren Durchgang f' mit der Verticalebene dar, und ziehe hierauf die Tracen $f'\beta$ und βh , beziehentlich parallel zu $d'\alpha'$ und αd . Die Trace βh begegnet der Basis des Kegels in g und h ; und hieraus ergeben sich die Geraden ag und ah , welche die Horizontalprojectionen derjenigen zwei Erzeugenden sind, darin die Ebene $h\beta f'$ den Kegel schneidet. Nun aber sind diese Erzeugenden parallel zu denen, auf der windschiefen Oberfläche gesuchten; man kennt folglich die Horizontalprojectionen derselben, sobald man zu ag und ah parallel, Tangenten an den Kreis ab zieht.

Unter diesen vier Tangenten giebt es zweie pk und qi , welche zweien Erzeugenden entsprechen, deren Durchgangspunkte mit der Horizontalebene p und q , und deren Verticalprojectionen $p'k'$ und $q'i'$ sind. Diese zwei Erzeugenden gehören zu zwei verschiedenen Erzeugungsarten, sie treffen sich im Punkte $[m, m']$ und bestimmen die Ebene $p\gamma r$, welche in diesem Punkte die Oberfläche berührt, und der gegebenen Ebene parallel ist. Die zwei anderen Tangenten sl und to , entsprechen zweien, sich auch in einem Punkte $[n, n']$ schneidenden Erzeugenden, welche eine zweite, der gegebenen Ebene parallele Berührungsebene $s\delta u$ bestimmen.

101. Aufgabe XX. Durch eine gegebene Gerade eine Berührungsebene an eine windschiefe Oberfläche zu ziehn.

Um diese Aufgabe auf die einfachste Weise zu lösen, bestimme man den Begegnungspunkt der Geraden mit der Ebene des Kehlkreises; man sehe diesen Punkt als den Scheitel eines umschriebenen Kegels der windschiefen Oberfläche an, und ziehe hierauf eine Berührungsebene an diesen Kegel durch die Gerade. Vor der Entwicklung dieser Constructionen erscheint es jedoch rathsam, an einige Eigenschaften zu erinnern, worauf jene beruhen, und welche zur analytischen Geometrie gehören.

Zuvörderst ist die Berührungscurve des Kegels mit der windschiefen Oberfläche, eine ebene Linie der zweiten Ordnung; und da der Scheitel des Kegels in der Ebene des Kehlkreises liegt, und der Kehlkreis die Oberfläche symmetrisch schneidet, so leuchtet ein, daß die Ebene dieser Curve perpendicular zu der, des Kehlkreises ist.

Zweitens ist diese Curve eine Hyperbel, deren Axe und Asymptoten leicht zu erhalten sind. Denn setzen wir, um die Begriffe festzuhalten, daß der Scheitel des Kegels außerhalb des Kehlkreises liege, und führen durch diesen Punkt zwei Tangenten an den Kehlkreis, so wird die, die Berührungspunkte verbindende Sehne, offenbar die Queraxe sein; und um die Asymptoten zu erhalten genügt es, durch die Mitte dieser Sehne, in der Ebene der Hyperbel zwei Gerade zu ziehen, welche mit einer Parallele zur Revolutionsaxe Winkel bilden, gleich denen der Erzeugenden der windschiefen Oberfläche mit der Axe.

Drittens finde man, da eine Axe und die Asymptoten bekannt sind, die andere Axe und hierauf die Brennpunkte. Dann kann man, mittelst einer geometrischen Construction, und ohne die Hyperbel zu ziehen, Tangenten an diese Curve führen und die Berührungspunkte bestimmen.

Kehren wir zur Forderung zurück; dieselbe beschränkt sich darauf, durch die gegebene Gerade Berührungsebenen an den Kegel zu legen, welcher zur Basis die so

eben erwähnte Hyperbel hat. Zu diesem Behuf bestimme man, wie eben erklärt wurde, die Ebene, die Queraxe, die Asymptoten und die Brennpunkte der Hyperbel; man verlängere die gegebene Gerade bis zu ihrem Begegnungspunkte mit der Ebene dieser Curve; hierauf führe man durch diesen Punkt Tangenten zu dieser Curve, und finde die Berührungspunkte dieser Tangenten. Diese Punkte sind jene, darin die windschiefe Oberfläche durch die gesuchten Berührungsebenen berührt werden muß, und die Aufgabe unterliegt nun keinerlei Schwierigkeiten.

Man behalte stets die Anordnung der vorigen Figuren bei, und es seien ef , $e'f'$ die Projectionen der gegebenen Geraden (Fig. XX). Nachdem oben Mitgetheilten, bestimme man den Punkt $[g, g']$, wo sie die Ebene des Kehlkreises schneidet, führe die Tangenten gh , gi an den Kehlkreis, und ziehe die Gerade hi durch die Berührungspunkte. Die Punkte h und i sind die Horizontalprojectionen zweier Punkte, welche zur Hyperbel gehören, darin die windschiefe Oberfläche von dem Kegel berührt wird, dessen Scheitel im Punkte $[g, g']$ liegt; und da diese Hyperbel durch den Kehlkreis symmetrisch getheilt wird, so folgt, daß ih zugleich die Projection der ersten Axe (oder Hauptaxe) dieser Curve, und die Trace der Verticalebene ist, welche dieselbe enthält. Diese Ebene wird von der Geraden in einem Punkte getroffen, dessen Projectionen k und k' leicht zu erhalten sind, und dieß ist der Punkt, von welchem aus Tangenten zur Hyperbel gezogen werden müssen.

Um dazu zu gelangen, führe man diese Ebene durch Drehung in eine, zur Verticalebene parallele Lage, dergestalt, daß sie stets in derselben Entfernung von der Axe bleibt; dann können die, in dieser Ebene vorzunehmenden Constructionen, in der verticalen Projectionsebene vollzogen werden. Es sei HI die Lage, welche die Sehne hi einnimmt; zeichnete man die Verticalprojection der Hyperbel, so erhielt man eine Hyperbel der nämlichen Gröfse, deren erste Axe $H'I'$ gleich HI oder hi wär, und deren Asymptoten

$b'c'$ und $b'd'$ sind, und deren Brennpunkte ϕ und ψ leicht erhalten werden. Der Punkt $[k, k']$ beschreibt einen Kreis um die Axe, und kommt in eine Lage, darin es leicht ist, die Projectionen K und K' zu erhalten. Man hat im Risse die zur Construction der, im Punkte K' entspringenden Tangenten der Hyperbel erforderlichen Linien dargestellt; $K'M'$, $K'N'$ sind diese Tangenten, und M' , N' die Berührungspunkte. Diese Punkte müssen als Verticalprojectionen zweier Punkte angesehen werden, deren Horizontalprojectionen M und N auf HI liegen; und man muß untersuchen, was aus diesen Projectionen wird, sobald die Ebene der Hyperbel in ihre wahre Lage zurückkehrt. Nun aber leuchtet ein, daß dann M und N sich nach m und n auf hi übertragen, nachdem sie die Bogen Mm , Nn um den Mittelpunkt a beschrieben haben, und daß die Verticalprojectionen in die Durchschnitte m' , n' der Projectionslinien mm' , nn' , mit den Horizontalen $M'm'$, $N'n'$ zusammen fallen. Auf diese Art bestimmen sich die Projectionen m und m' , n und n' der Berührungspunkte der windschiefen Oberfläche mit den verlangten Berührungsebenen.

Die Tracen dieser Ebenen sind leicht zu construiren. Man sucht die Tracen e , f' der gegebenen Geraden; und da jede Berührungsebene an eine Revolutionsoberfläche perpendicular zu dem durch den Berührungspunkt gehenden Meridian ist, so ziehe man am , an , und fälle auf diese Linien die Perpendikel er , es , welche die horizontalen Tracen der Berührungsebenen sein werden. Ihre verticalen Tracen erhält man, indem man f' mit den Punkten verbindet, daselbst diese Perpendikel xy schneiden.

Sind diese letzteren Punkte zu entfernt, so kann man hier auf verschiedene Weise abhelfen. Z. B. kann man durch die Berührungspunkte, Parallelen $[mp, m'p']$, $[nq, n'q']$ zur gegebenen Geraden führen, wodurch die Punkte p' und q' gefunden werden.

Bemerkungen. Es kann sich ereignen, daß der Punkt $[g, g']$ innerhalb des Kehlkreises liegt. Die Be-

rührungscurve der windschiefen Oberfläche mit dem umschriebenen Kegel ist noch eine, in einer verticalen Ebene gelegene Hyperbel; aber dann ist ihre Queraxe vertical. Um diese Axe zu erhalten, muß man eine Meridianebene durch den Punkt $[g, g']$ führen, welcher im gegenwärtigen Falle innerhalb des Kehlkreises liegt; diese Ebene schneidet die Oberfläche in einer Hyperbel, deren eine Axe, so wie die Asymptoten man kennt, und zu welcher es leicht sein wird, Tangenten durch diesen nämlichen Punkt $[g, g']$ zu ziehen. Die Gerade welche die zwei so bestimmten Berührungspunkte vereinigt, ist die Queraxe um deren Auffindung es sich handelt. Uebrigens weichen die Constructionen unbedeutend von den in der Figur auseinandergesetzten ab.

Der Fall, für welchen die gegebene Gerade horizontal ist, ist in dem Obigen nicht enthalten. Um ihn zu behandeln, genügt es, eine Meridianebene perpendicular zu dieser Geraden zu führen, und durch den Punkt, wo diese jene schneidet, Tangenten zur Hyperbel zu ziehen, darin sie die windschiefe Oberfläche schneidet. Die Berührungspunkte dieser Tangenten werden diejenigen der gesuchten Berührungsebenen sein. Ueberdies sieht man leicht, daß es Fälle giebt, in welchen das vorliegende Problem unmöglich ist.

Berührungsebenen, an einige, nicht durch Umdrehung entstandene windschiefe Oberflächen.

102. Aufgabe XXI. Es mögen drei Gerade gegeben sein, welche man zu Leitlinien einer windschiefen Oberfläche wählt, man soll zuvörderst eine beliebige Erzeugende der Oberfläche darstellen, und hierauf die Berührungsebene für irgend einen Punkt dieser Erzeugenden.

Im Allgemeinen ist die fragliche Oberfläche ein Hyperboloid (62). Wenn die Leitlinien einer Ebene paral-

lel sind, so ist sie ein Paraboloid (73, Anmerk. II); allein folgende Auflösung eignet sich für alle Fälle. Man nehme willkürlich auf einer der Leitlinien einen Punkt, führe durch ihn und durch eine der zwei anderen eine Ebene, bestimme den Durchschnittspunkt dieser Ebene mit der dritten, und ziehe durch den letzteren Punkt und durch den auf der ersten Leitlinie genommenen eine Gerade. Offenbar begegnet diese Gerade den drei Leitlinien, und ist folglich eine Erzeugende der Oberfläche. Die Aufgabe verlangt ferner, daß man irgend einen Punkt auf dieser Erzeugenden nehme, und durch ihn eine Berührungsebene zur Oberfläche lege. Da nun diese Ebene die Erzeugende enthalten muß, so genügt es, eine zweite in ihr enthaltene Gerade zu finden. Um hierzu zu gelangen, bestimme man zwei andere Erzeugende, und ziehe durch den Berührungspunkt eine, beide treffende Gerade; nach einem bekannten Satze (71), ist man gewiss, daß diese Gerade zur Oberfläche gehört, und folglich auch zur Berührungsebene.

Man bezeichne (Fig. XXI) durch A und A' , B und B' , C und C' die Projectionen der drei gegebenen Erzeugenden, und durch a und a' diejenigen eines beliebigen Punktes der ersteren. Durch diesen Punkt ziehe man eine Parallele zur zweiten, und ermittel'le deren horizontale Trace b . Auch stelle man die Tracen c , d der zweiten Leitlinie dar, ziehe nachher die Geraden $bc\alpha$ und αd , welche die Tracen einer, durch den Punkt $[a, a']$ und die Gerade $[B, B']$ gehenden Ebene sind. Endlich suche man (20) die Projectionen e, e' des Durchschnitts dieser Ebene mit der dritten Leitlinie $[C, C']$, und ziehe die Geraden $ae, a'e'$. Die Linie, deren Projectionen diese Geraden sind, ist eine Erzeugende; denn vermöge der Construction, enthält sie einen Punkt der ersten und dritten Leitlinie; und außerdem muß sie auch die zweite $[B, B']$ treffen, weil sie mit ihr in der Ebene bad liegt (darum ist kk' perpendicular zu xy). Auf dieselbe Weise bestimme man die Projectionen fg und $f'g'$, hi und $h'i'$ zweier anderen Erzeugenden. (50) biolodiq

Auf der ersten Erzeugenden sei ein beliebiger Punkt $[m, m']$ genommen, durch welchen man eine Berührungsebene zur windschiefen Oberfläche zu führen gedenkt. Nach dem oben Erinnerten, muß man eine Gerade suchen, welche durch diesen Punkt geht, und sich den zwei anderen Erzeugenden anschließt; was mittelst der in der ersten Abtheilung (30), Aufgabe XIII dritte Auflösung, vollzogen werden soll. In Folge dessen, ziehe man durch den Berührungspunkt, und durch zwei, auf der Erzeugenden $[fg, f'g']$ beliebig genommene Punkte, die Geraden $[mn, m'n']$ und $[mo, m'o']$, und suche hierauf die Durchschnittspunkte $[p, p']$, $[q, q']$ derselben mit derjenigen Verticalebene, welche die Erzeugende $[hi, h'i']$ in sich enthält; alsdann kennt man den Durchschnitt $[r, r']$ der Geraden $[pq, p'q']$ mit dieser Erzeugenden, und folglich auch die Gerade $[mr, m'r']$. Nun aber ist dieß diejenige Linie, welche mit der Erzeugenden $[ae, a'e']$ die Berührungsebene bestimmt; folglich wird man durch Construction der Tracen dieser zwei Linien, leicht die Berührungsebene *svt* erhalten.

Es ist zu beachten, daß die Gerade $[ae, a'e]$ in der Ebene $b\alpha d$ liegt, und daß sie folglich ihre verticale Trace u auf der verticalen Trace dieser Ebene haben muß.

103. Aufgabe XXII. Drei gegebene Ellipsen sind ähnlich, ähnlich gelegen, und haben ihre Mittelpunkte auf der nämlichen Verticalen. Man bedingt außerdem, daß die zwei gröfseren unter einander gleich sind, und in gleichweit, von der Ebene der kleineren, entfernten Ebenen sich befinden. Diese drei Curven werden als die Leitlinien einer windschiefen Oberfläche angesehen, man verlangt, eine Berührungsebene zu dieser Curve, durch einen, auf einer beliebigen Erzeugenden, willkührlich genommenen Punkt zu ziehen.

Gesetzt, man kennt die Punkte, darin eine Erzeugende sich auf die Leitlinien stützt, so denke man sich in

diesen Punkten drei Tangenten zu diesen Curven, und nehme diese Tangenten als Leitlinien einer neuen windschiefen Oberfläche. Da die fragliche Erzeugende auch zu dieser Oberfläche gehört, so wird, nachdem in (74) Bewiesenen, die Berührungsebene in jedem Punkte dieser Erzeugenden die nämliche für diese zwei Oberflächen sein. Weil die drei Leitlinien horizontal sind, so ist die Oberfläche ein Paraboloid (73, Anmerk. II), und indem man sie durch horizontale Ebenen schneidet, so müssen sich Gerade ergeben (73, Anmerk. I). Um daher, die Berührungsebene zu der vorliegenden Oberfläche, für einen gegebenen Punkt der Erzeugenden zu erhalten, bestimme man eine zweite Erzeugende der letzteren Oberfläche, lege durch den gegebenen Punkt eine, diese Erzeugende in einem Punkte schneidende horizontale Ebene, und ziehe durch diese zwei Punkte eine Gerade; diese Gerade wird gänzlich auf dem Paraboloid liegen, dergestalt, dass die durch diese Gerade und durch die erste Erzeugende bestimmte Ebene, die verlangte Berührungsebene sein muss. Alles diess ist schon in Nr. 75 erörtert worden.

Es ist erlaubt, die eine der gröfseren Ellipsen acb (Fig. XXII), in der horizontalen Projectionsebene zu nehmen, und deren grofse Axe ab parallel zur Projectionsebene xy ; dann ist die Verticalprojection dieser Ellipse ein, der ab gleiches Stück $a'b'$ von xy . Der Aufgabe gemäfs haben die Mittelpunkte der drei gegebenen Ellipsen, zur gemeinschaftlichen Horizontalprojection den Mittelpunkt o der Ellipse acb ; die andere gröfsere Ellipse hat zur Horizontalprojection die nämliche Ellipse acb , und zur Verticalprojection eine, zu xy parallele, und der $a'b'$ gleiche Gerade $a''b''$; endlich hat die kleine Ellipse zur Horizontalprojection eine, der acb ähnliche Ellipse dfe , deren grofse Axe de auf ab liegt, und zur Verticalprojection eine, der de gleiche, und von $a'b'$ und $a''b''$ gleichweit entfernte Horizontale $d'e'$.

Für einen Augenblick betrachte man die zwei Ellipsen

acb , dfe besonders (Fig. b). An einen beliebigen Punkt g der kleineren, führe man die, die grössere in h und i schneidende Tangente hi ; ziehe die conjugirten Halbmesser oh , oi , welche die kleinere in ϕ und ψ treffen; und ziehe auch die sich in e schneidenden $\phi\psi$ und og . Da die zwei Ellipsen concentrisch, ähnlich, und ähnlich gelegen sind, so muß man $oh : oi :: o\phi : o\psi$ haben; folglich ist $\phi\psi$ parallel zu hi . Nun aber werden in jeder Ellipse, die einer Tangente parallelen Sehnen, von einem, durch den Berührungspunkt gehenden Durchmesser halbt; folglich ist $\phi e = \psi e$, und dann $gh = gi$; d. h. eine, von der grösseren Ellipse begränzte gerade Tangente zur kleineren, wird im Berührungspunkte halbt.

Kehren wir nun zur Forderung zurück. Um die Projectionen irgend einer Erzeugenden zu erhalten, nehme man auf der Ellipse dfe (Fig. XXII) den Punkt g , ziehe die im Punkt g halbirte Tangente hi , und auch die beziehentlich durch $a'b'$, $d'e'$, $a''b''$ begränzten Projectionslinien hh' , gg' , ii' . Die Projectionen h und h' , g und g' , i und i' , werden diejenigen dreier, beziehentlich zu den drei Leitcurven gehöriger Punkte sein; nun aber ist es leicht zu erkennen, daß h' , g' , i' in gerader Linie liegen; folglich sind die Geraden hgi und $h'g'i'$ die Projectionen einer Erzeugenden der Oberfläche, und die horizontale Trace dieser Erzeugenden ist in h . Ueberdies ist es klar, daß es eine andere Erzeugende giebt, welche noch hi zur Projection hat, deren horizontale Trace aber in i sich befindet; und dann wird die Verticalprojection von i auf $a'b'$ sein, während die dem Punkte h entsprechende auf $a''b''$ liegt.

Gehen wir nun darauf aus, die Berührungsebene zur Oberfläche an irgend einen Punkt $[m, m']$ der ersten Erzeugenden $[hi, h'i']$ zu finden. Man muß, wie bereits bemerkt wurde, die windschiefe Oberfläche der Aufgabe, durch das Paraboloid ersetzen, dessen Leitlinien die drei Ellipsen in den Punkten $[h, h']$, $[g, g']$, $[i, i']$ berühren. Darum ziehe man die Tangenten hk , ik ; und es

werden die drei neuen Leitlinien die drei unbestimmten Geraden sein, welche beziehentlich hk und $a'b'$, ih und $d'e'$, ik und $a''b''$ zu Projectionen haben. Da die auf hk errichtete Verticalebene die erste dieser Linien enthält, so bestimme man deren Durchschnitte $[h, h']$ und $[k, k']$ mit den zwei anderen, und ziehe die Gerade $k'h''$. Auf diese Weise ist man versichert, daß die Linie $[hk, h''k']$ die drei leitenden Tangenten trifft, und daß sie folglich eine Erzeugende des Paraboloids ist. Nun denke man sich durch den Punkt $[m, m']$ eine horizontale Ebene, und bestimme deren Durchschnitt $[n, n']$ mit dieser Erzeugenden; ziehe hierauf die Horizontale $[mn, m'n']$ und ermittle die verticale Trace p' derselben. Da die Berührungsebene die Horizontale $[mn, m'n']$, und die Erzeugende $[hi, h'i']$ enthalten muß, so ziehe man $h\alpha$ parallel zu mn , und hierauf die Verbindende $\alpha p'$, so wird $h\alpha p'$ die Berührungsebene sein.

Bestätigungen ergeben sich, indem man Parallelen zu $h\alpha$ durch beliebige Punkte der Erzeugenden $[hi, h'i']$ zieht; und so fand man die Punkte u' und v' auf der verticalen Trace.

104. Andere Auflösung. Durch die Projection m , ziehe man eine zweite Tangente srt zur Ellipse dfe . Diese wird die Horizontalprojection zweier Erzeugenden der Oberfläche sein, welche sich dadurch unterscheiden, daß die eine die Horizontalebene in s , und die andere in t durchdringt. Betrachtet man nur die erstere, welche $s'r't'$ zur Verticalprojection hat, so wird behauptet, daß dieselbe durch den Punkt $[m, m']$ geht. Denn, bezeichnen X und H die Höhen, in welchen die in m und r errichteten Verticalen diese Erzeugende schneiden, so leuchtet ein, daß man $X : H :: sm : sr$ hat. Drückt man durch Y die Erhebung des Punktes $[m, m']$, und die des Punktes $[g, g']$ durch H aus, so findet statt: $Y : H :: hm : hg$. Der Eigenschaften der Ellipse wegen ist es leicht einzusehen, daß die Dreiecke gmr und hms ähnlich sind; folglich $sm : sr :: hm : hg$. In Folge

dessen hat man $X : H :: Y : H$ woraus $X = Y$, was obigen Satz begründet.

Man hat folglich auf der windschiefen Oberfläche eine zweite, durch den Berührungspunkt gehende Erzeugende; und es zeigt sich so die Berührungsebene vollkommen bestimmt. Diese zweite Auflösung ist weit einfacher als die erste; sie gründet sich aber auch auf minder allgemeine Betrachtungen.

Bemerkung. Aus den gleichen Höhen X und Y folgt, dafs es auf der fraglichen Oberfläche zwei verschiedene Systeme der Erzeugenden giebt, und dafs jede Erzeugende des einen derselben allen des anderen begegnet. Diese Oberfläche kann folglich durch eine Gerade entstehen, welche sich dreien anderen anschliesst, und nun sieht man, dafs sie in derjenigen, der Aufgabe XXI enthalten ist.

105. Aufgabe XXIII. Eine Berührungsebene an eine windschiefe Oberfläche zu legen, welche zu Leitlinien eine horizontale Gerade und zwei, in parallelen Verticalebenen liegende Curven hat.

Die in diesem Beispiel zu verfolgende Methode ist noch eine Anwendung der im Vorigen aufgestellten Sätze (Nr. 74 und 75); d. h. man ersetzt die windschiefe Oberfläche durch ein hyperbolisches Paraboloid, welches sich mit jener in der Erzeugenden vereinigt, auf welcher der gegebene Punkt liegt.

Es seien ab (Fig. XXIII) die horizontale Leitlinie, und ed , ef die horizontalen Tracen der, die zwei Curven enthaltenden Verticalebenen. Wählt man cd zur Projectionsaxe, so werden diese Curven in wahrer Gröfse auf der Verticalebene projicirt sein; es wird angenommen, sie seien zwei gleiche Halbkreise, etwa wie $cg'd$, $e'i'f'$. Um irgend eine der Erzeugenden der Oberfläche zu finden; wird durch die Leitlinie ab eine Ebene abg' gelegt. Dieselbe schneidet die Ebenen der Kreise in parallelen Geraden, deren Projectionen bg und bg' , hi und $h'i'$ sind;

und diese Parallelen schneiden die Kreise in Punkten, welche g und g' , i und i' zu Projectionen haben. Werden daher die Geraden gi und $g'i'$ gezogen, so erhält man die Projectionen einer Erzeugenden.

Man bestimme den Punkt $[a, a']$ wo diese Erzeugende die Leitlinie ab trifft, und bemerke, daß die, diese zwei Linien enthaltende Ebene abg' , im Punkte a zur Oberfläche berührend sein muß. In dieser Ebene führe man die Gerade $[am, a'm']$ parallel zu bg' , und auch die Tangenten $[gk, g'k']$, $[il, i'l']$ zu den zwei Kreisen. Man hat so drei, zur Verticalebene parallele Gerade; und das Paraboloid, welches entsteht, indem man dieselben zu Leitlinien wählt, hat in allen Punkten der gemeinschaftlichen Erzeugenden, die nämlichen Berührungsebenen wie die vorliegende Oberfläche (74).

Nun suche man eine andere Erzeugende dieses Paraboloids. Führt man zu diesem Behufe eine Ebene, durch die erste dieser drei Geraden, und durch die horizontale Trace l der zweiten Tangente, so leuchtet ein, daß die horizontale Trace dieser Ebene aln , und ihre verticale Trace eine Parallele no' zu $a'm'$ ist. Diese schneidet die erste Tangente im Punkte $[o, o']$, und indem man ol und $o'l'$ zieht, so erhält man die Projectionen einer Geraden, welche die Linie $[am, a'm']$ treffen muß; diese Gerade ist eine neue Erzeugende des Paraboloids. Nunmehr kann man noch diese Oberfläche erzeugen, indem man eine Gerade, zur Verticalebene parallel, gleitend auf diesen zwei bekannten Erzeugenden fortbewegt (73); d. h. jede zur Verticalebene parallele Ebene schneidet diese Linien in zwei Punkten, welche eine, auf dem Paraboloid liegende Gerade bestimmen.

Hiernach sei $[p, p']$ der, auf der ersten Erzeugenden $[ag, a'g']$ gegebene Berührungspunkt; durch diesen Punkt führe man, parallel zur Verticalebene, eine Ebene, welche die zweite $[ol, o'l']$ in einem Punkte $[q, q']$ schneidet. Die durch diesen, und den gegebenen Punkt gehende Gerade $[pq, p'q']$, muß in der gesuchten Berührungs-

ebene liegen; die Gerade $[ag, a'g']$ muß es aber auch; folglich bestimmen die horizontalen Tracen a und r dieser Geraden, die horizontale Trace $t\alpha$ der Berührungsebene; die verticale Trace $\alpha t'$ anlangend, so muß sie durch g' gehen, und überdies zu $p'q'$ parallel sein.

106. Aufgabe XXIV. Eine Berührungsebene an ein, durch eine Horizontale beschriebenes Conoid zu führen, welche sich während der Bewegung auf eine verticale Gerade und auf eine, in einer Verticalebene liegende Curve stützt.

Die horizontale Projection der verticalen Leitlinie ist ein Punkt a (Fig. XXIV), und ihre verticale ein Perpendikel $a'a''$ zu xy ; es wird bedungen, daß die gegebene Curve $bd'c$ in der verticalen Projectionsebene liegt. Hat man den Punkt p in der Horizontalebene gewählt, so ziehe man apd , errichte auf xy das, die Curve in d' schneidende Perpendikel dd' , und ziehe die Horizontale $d'p'$, so wie die Projectionslinie pp' . Es ist klar, daß dp und $d'p'$ die Projectionen einer Erzeugenden, und p und p' diejenigen eines Punktes derselben sind. Die Berührungsebene für diesen Punkt ist es, welche bestimmt werden soll.

Man ziehe die Tangente $d'e$. Das Paraboloid, welches durch eine Horizontale beschrieben wird, die auf dieser Tangente und der gegebenen Verticale gleitet, vereinigt sich in der ganzen Ausdehnung der Erzeugenden $[dp, d'p']$ vollkommen, mit der vorliegenden Oberfläche. Wird ae gezogen, so erhält man eine zweite Erzeugende dieses Paraboloids; und führt man durch den Punkt $[p, p']$ eine, zur Verticalebene parallele Ebene, so schneidet sie diese Oberfläche in einer Geraden $[pq, p'q']$, welche in der Berührungsebene liegen muß. Da aber die Horizontale $[dp, d'p']$ auch darin liegen muß, so ist diese Ebene nun bestimmt. Ihre horizontale Trace $t\alpha$ muß durch q gehen, und parallel zu dp sein; ihre verticale Trace $\alpha t'$ geht durch d' , und ist parallel zu $p'q'$.

Die Tangente ed' wird $a'a''$ in einem Punkte a'' schneiden, welcher offenbar die Verticalprojection einer Erzeugenden des Paraboloids ist; nun aber muß diese Erzeugende, eben so wie alle diejenigen, welche zur nämlichen Entstehungsart gehören, von der Geraden $[pq, p'q']$ getroffen werden; und deshalb geht die Projection $p'q'$ durch den Punkt a'' .

107. Aufgabe XXV. Eine Berührungsebene an eine, durch eine horizontale Gerade erzeugte Oberfläche zu führen, welche erstere genöthiget ist, stets eine, auf einem verticalen Cylinder gezogene Curve zu treffen, und beständig, entweder Tangente oder Normale, zu einem anderen verticalen Cylinder zu bleiben.

Setzen wir, es sei die, auf dem ersten verticalen Cylinder gezogene Leitlinie eine Schraubenlinie, wie dieß bei mehreren Anwendungen der descriptiven Geometrie, auf Steinschnitt und Holzverbindungen vorkommt. Deswegen mögen zuvörderst die Construction und die Eigenschaften dieser Curve hier Platz finden.

1) Es sei cd (Fig. c) der Durchschnitt eines verticalen Cylinders und einer horizontalen Ebene; auf cd nehme man einen beliebigen Anfangspunkt o , und trage oberhalb auf die Erzeugenden verschiedener Punkte von cd , des Cylinders, Höhen $o'n'$, $o''n''$, $o'''n'''$, ... denen Bogen oo' , oo'' , oo''' , ... proportional auf. Der so bestimmte Ort der Punkte n' , n'' , n''' , ... ist eine Schraubenlinie. Man kann z. B. diese Bogen unter sich, und $o'n'$ einer gegebenen Höhe H gleich setzen; dann muß man $o''n'' = 2H$, $o'''n''' = 3H$, etc. nehmen.

2) Entwickelt man den Cylinder auf einer Ebene, so läßt sich behaupten, daß die Schraubenlinie zur Geraden wird. Um dieß zu beweisen, denke man sich die Curve cd als ein Polygon von unendlich vielen Seiten, und den Cylinder als ein Prisma, von unendlich schmalen Seitenflächen; ferner daß diese verschiedenen Seitenflächen sich

um ihre Kanten drehen, und sich in einer einzigen Ebene ausbreiten. Es leuchtet ein, daß da die Seiten dieser Basis, nicht aufhören werden, perpendicular zu diesen Kanten zu sein, diese auf eine Gerade ef zu liegen kommen, dergestalt, daß die Bogen oo' , oo'' , ... zu Theilen ii' , ii'' dieser Geraden werden. Anderer Seits ist es klar, daß in der Entwicklung diese Bogen die nämlichen Längen behalten, und die Höhen $o'n'$, $o''n''$, ... nur neue Lagen $i'm'$, $i''m''$, ... einnehmen; daher sind diese Höhen den Entfernungen ii' ii'' , ... proportional; folglich ist die Schraubenlinie in einer Geraden entwickelt.

3) Diese Gerade ih darin die Schraubenlinie entwickelt ist, bildet mit allen Erzeugenden gleiche Winkel; nun aber sind diese Winkel die nämlichen, welche vor der Entwicklung, die Seiten oder Elemente der Schraubenlinie mit den daran angränzenden Kanten bildeten; daher sind diese letzteren Winkel auch gleich; folglich sind die Tangenten zur Schraubenlinie, welche nichts Anderes, als diese verlängerten Seiten sind, durchgängig zu den Erzeugenden des Cylinders gleich geneigt.

4) Man kann festsetzen, daß die Entwicklung in einer Berührungsebene zum Cylinder geschehen ist; z. B. in derjenigen, welche durch die Kante $o'''n'''$ geführt wär'. Dann ist es leicht einzusehen, daß die Geraden io''' und in''' , auf welche sich die Basis oo''' und die Schraubenlinie on''' entwickelten, beziehentlich berührend zu diesen Curven sind; und hieraus ergiebt sich eine sehr einfache Construction für die Tangente zur Schraubenlinie. Fordert man die Tangente des Punktes n''' , so nehme man auf der Tangente eo''' zur Basis cd , den Abstand io''' dem rectificirten Bogen oo''' gleich, und ziehe die Verbindende in''' , so ergiebt sich die verlangte Tangente.

Kommen wir auf das vorliegende Problem zurück. Es sei (Fig. XXV) ab die horizontale Trace eines verticalen Cylinders, zu welchem die Erzeugenden normal sein sollen; diese Erzeugenden werden zu horizontalen Pro-

jectionen Normalen zu dieser Curve haben. Nun aber bilden diese Normalen, durch ihre successiven Durchschnitte eine Curve ef , wozu sie berührend sind, und daher sind die Erzeugenden der windschiefen Oberfläche selbst Tangenten zu dem auf dieser Curve errichteten verticalen Cylinder. Hieraus ersieht man folglich, wie es zugeht, dafs die zu lösende Aufgabe schlechterdings die nämliche ist, es mögen nun die Erzeugenden Normalen zu einem verticalen Cylinder, oder Tangenten desselben sein. Sei chd die Trace eines anderen verticalen Cylinders, auf welchem die leitende Schraubenlinie gezogen ist, dadurch construirt, dafs man den Bogen oo' , oo'' , ... proportionale Verticalen oberhalb der verschiedenen Punkte $o'o''$, ... genommen hat. Um diese Curve zu bestimmen genügt es, die, einem gegebenen Bogen oo' entsprechende Höhe H zu kennen.

Angenommen, man verlangt die Berührungsebene zu dem Punkt, deren Horizontalprojection p ist. Nach dem Vorigen, erhält man die Horizontalprojection der Erzeugenden, auf welcher dieser Punkt liegt, indem man pk berührend zur Curve ef zieht; und die Höhe dieser Erzeugenden wird durch die Proportion $oo' : ohg :: H : x$ bekannt. Gröfserer Einfachheit wegen, wollen wir jedoch die Constructionen in eine horizontale Ebene versetzen, welche oberhalb der Erzeugenden, in einer Entfernung $3H$ liegt. Die Verticalebene anlangend, so werde sie perpendicular zu dieser Erzeugenden genommen; folglich wird die Projectionsaxe xy perpendicular zu pk sein. Verlängert man dann pk bis nach m , und errichtet auf xy das Perpendikel $mq = 3H$, so wird der Punkt q derjenige sein, daselbst die Erzeugende die Verticalebene trifft. Nun aber mufs die Berührungsebene diese Erzeugende enthalten; folglich wird ihre horizontale Trace parallel zu pk sein, und ihre verticale durch den Punkt q gehen.

Nimmt man den Bogen gh dem Dreifachen von oo' gleich, so wird der Punkt h derjenige sein, wo die leitende Schraubenlinie durch die Horizontalebene geschnit-

ten wird. Wird gi berührend zu chd und dem rectificirten Bogen gh gleich gezogen, so muß der auf dieser Ebene liegende Punkt i , der Fußpunkt der Tangente zur Schraubenlinie für den, in g projecirten Punkt sein. Zieht man endlich ik , so werden diese Gerade und die in gk projecirte, Erzeugende des Paraboloids sein, welches durch eine Horizontale entsteht, die auf der Tangente zur Schraubenlinie und auf der in k errichteten Verticale gleiten würde. Nun aber wird behauptet, daß dieses Paraboloid, sich vollkommen mit der vorliegenden windschiefen Oberfläche, in der ganzen Ausdehnung der gemeinschaftlichen Erzeugenden vereinigt.

Zuvörderst ist die Erzeugende in diesen zwei Oberflächen horizontal, und für den in g projecirten Punkt die Berührungsebene offenbar gemeinschaftlich; es genügt daher zu zeigen, daß es sich mit der Berührungsebene des in k projecirten Punktes eben so verhält (74, Anmerk.). Und wirklich, es muß die Berührungsebene dieses Punktes der vorliegenden Oberfläche, die horizontale und zum Cylinder ef berührende Erzeugende enthalten, so wie die Tangente zu der, auf diesem Cylinder durch die Erzeugende der Oberfläche, beschriebenen Curve; folglich ist diese Ebene auch berührend zum Cylinder ef , und mithin enthält sie die in k errichtete Verticale. Es muß aber die Berührungsebene zum Paraboloid auch diese Verticale enthalten, so wie die horizontale Erzeugende; folglich bilden diese zwei Berührungsebenen nur eine. Folglich vereinigt sich das Paraboloid in der gemeinschaftlichen Erzeugenden, mit der bedungenen Oberfläche.

Alle zu den zwei Leitlinien des Paraboloids parallele Ebenen müssen diese Oberfläche in Geraden schneiden. Führt man eine solche Ebene durch den gegebenen Punkt $[p, q]$, so ist ihre horizontale Trace eine Parallele pr zu gi , welche ki in r trifft. Der Punkt r gehört zur Berührungsebene des Paraboloids für den gegebenen Punkt; da nun diese Ebene auch berührend zur windschiefen Oberfläche ist, so wird folglich, wenn man ra parallel zu

pk , und die Verbindende αq zieht, $r\alpha q$ die gesuchte Berührungsebene sein.

Hätte man an die nämliche Oberfläche andere Berührungsebenen für, auf verschiedenen Erzeugenden liegende Punkte zu bestimmen, so müßten ganz ähnliche Constructionen vollzogen werden. Ist z. B. die Horizontalprojection eines gegebenen Punktes der Oberfläche in s gegeben, so ziehe man die Tangente st , nehme eine neue Projectionsaxe uv perpendicular zu dieser Tangente, etc. Der Riss macht weitere Erklärungen entbehrlich.

Dritte Abtheilung.

Krumme Linien mit ihren Tangenten.

Allgemeine Betrachtungen.

108. Eine Linie ist mittelst einer, sie charakterisirenden Eigenschaft bestimmt, oder durch die Bewegung eines Punktes, oder endlich wenn man zwei dieselbe enthaltende Oberflächen kennt. Da in den meisten Anwendungen der descriptiven Geometrie die Durchschnitte der Oberflächen es sind, als welche sich die Linien darstellen, so werden wir sie vorzüglich von diesem Standpunkte aus in dieser dritten Abtheilung betrachten. Nichts desto weniger sollen, als Beispiele für die zwei ersten Bestimmungsarten die Schraubenlinie und die sphärische Epicycloide abgehandelt werden.

In den anderen Beispielen wird die zu lösende Aufgabe stets in folgendem allgemeinen Satze enthalten sein: es sind zwei Oberflächen gegeben, man soll

die Projectionen der Durchschnittscurve, so wie diejenigen der Tangente eines beliebigen Punktes dieser Curve finden. Ist eine der Oberflächen eben, dann muß man außerdem den Durchschnitt in seinen wahren Dimensionen darstellen; und ist die eine der Oberflächen developabel, dann sucht man, was aus dem Durchschnitte in der Entwicklung dieser Oberfläche wird.

109. Beginnen wir mit dem einfacheren Falle, und setzen, es handele sich um den Durchschnitt einer Ebene und einer krummen Oberfläche. Da die Entstehung der Oberfläche bekannt ist, so betrachte man die Erzeugende in verschiedenen Lagen, und bestimme für eine jede ihren Durchschnitt mit der Ebene. Man erhält so die Projectionen so vieler zum gesuchten Durchschnitt gehöriger Punkte als man will; um nun die Projectionen dieser Durchschnitte zu erhalten, ist nichts weiter erforderlich, als die, in einer jeden Projectionsebene gefundenen Punkte durch einen stätigen Zug zu verbinden.

110. Handelt es sich um den Durchschnitt zweier krummen Oberflächen, dann dient folgendes allgemeines Verfahren. Man schneidet dieselben zugleich durch eine Folge von Ebenen; jede dieser Ebenen bestimmt in den Oberflächen zwei krumme Linien, deren Projectionen man darstellt; und die gemeinschaftlichen Punkte dieser Projectionen gehören zu denjenigen des gesuchten Durchschnitt's. Durch Wiederholung dieses Verfahrens für verschiedene Ebenen, erhält man die Projectionen der Durchschnittscurve für jede beliebige Genauigkeit.

Für den ersten Augenblick scheint es, als ob die Bestimmungen zu denen jede Hülfebene Anlaß giebt, das Zeichnen von vier Curven erheischen, zweier auf der Horizontal- und zweier auf der Verticalebene. In der That aber hat man nur zweie darzustellen; denn, hat man z. B. zwei Curven in horizontaler Projection gefunden, so sind die Durchschnitte dieser Curven die Hori-

zontalprojectionen von zum Durchschnitte beider Oberflächen gehörigen Punkten; und da diese Punkte in der Hülfs-ebene liegen, so erhält man leicht ihre Verticalprojectionen mittelst der Horizontalprojectionen derselben, ohne irgend eine andere Curve zu gebrauchen (20).

Da übrigens die Hülfs Ebenen gänzlich willkürlich sind, so kann man sie einer der Projectionsebenen parallel wählen, z. B. der Horizontalebene. Dann projeciren sich die Durchschnitte der zwei Oberflächen durch jede dieser Ebenen, vertical auf einer zur Projectionsaxe parallelen Geraden, und die Constructionen gestalten sich ungemein einfach.

111. Es giebt aber besondere, oft erscheinende Fälle, in welchen die Wahl der Hülfs Ebenen durch die Natur selbst der Oberflächen angezeigt ist, deren Durchschnitt gesucht wird.

Ist eine der Oberflächen ein Cylinder, so wählt man Hülfs Ebenen den Erzeugenden des Cylinders parallel, weil man dann versichert ist, daß ihre Durchschnitte mit dieser Oberfläche gerade Linien sein werden. Sind beide Oberflächen cylindrisch, so müssen die Hülfs Ebenen den Erzeugenden der einen und der anderen zugleich parallel sein.

Ist eine der Oberflächen ein Kegel, dann läßt man die Ebenen durch den Scheitel geh'n; und ist die andere Oberfläche auch ein Kegel, so legt man sie durch die, ihre Scheitel verbindende Gerade. Auf diese Weise beschränken sich die Durchschnitte in diesen Kegel bloß auf gerade Linien.

Ist eine der Oberflächen ein Kegel, und die andere ein Cylinder, so müssen diese Ebenen durch den Scheitel des ersteren gehen, und den Erzeugenden des zweiten parallel sein.

Wenn eine der Oberflächen eine Revolutionsoberfläche ist, so werden die Hülfschnitte perpendicular zur Axe dieser Oberfläche gelegt, wodurch Kreise entstehen.

112. Um den Durchschnitt zweier Oberflächen zu finden, schrieb man vor, diese Oberflächen durch eine Folge von Ebenen zu schneiden; inzwischen sieht man ein, daß man statt der Ebenen andere Oberflächen anwenden kann, wenn es nur leicht ist, ihre Durchschnitte mit den gegebenen Oberflächen zu erhalten. Dieser Fall kommt bei zwei Revolutionsoberflächen vor, deren Axen sich schneiden. Dann wird man Kugeln gebrauchen, welche alle, den Durchschnitt der zwei Axen zum gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben; es leuchtet ein, daß jede Kugel die zwei Revolutionsoberflächen in leicht zu bestimmenden Kreisen schneidet, und daß die, diesen Kreisen gemeinschaftlichen Punkte dem Durchschnitte der zwei Oberflächen angehören.

113. Wir kommen nun zur Tangente. Zuvörderst ist daran zu erinnern, daß die Berührungsebene eines Punktes einer Oberfläche, die Tangenten dieses Punktes für alle Curven enthält, welche durch diesen Punkt auf der Oberfläche gezogen werden können. Hieraus folgt, daß, wenn eine Linie aus dem Durchschnitte einer krummen Oberfläche mit einer gegebenen Ebene entstanden ist, die Tangente für einen Punkt dieser Linie dadurch erhalten wird, indem man die Berührungsebene zur Oberfläche an den fraglichen Punkt darstellt, und den Durchschnitt dieser Ebene mit der gegebenen bestimmt. Ueberhaupt, ist eine Linie der Durchschnitt zweier beliebiger Oberflächen, so führe man durch den auf dieser Linie gedachten Punkt, die Berührungsebenen zu den zwei Oberflächen; dann wird der Durchschnitt dieser Ebenen die gesuchte Tangente sein.

114. Diese Tangente bestimmt sich noch durch eine andere Betrachtung. Nach der Erklärung (51), sind die, zu zwei Oberflächen durch einen Punkt ihres Durchschnitts, gehenden Normalen, beziehentlich perpendicular zu den zwei, durch diesen Punkt berührend an diese Oberflächen geführten Ebenen; es ist daher die gesuchte Tangente, oder der Durchschnitt der Berührungsebenen,

perpendikulär zur Ebene der zwei Normalen; folglich ergibt sich diese Tangente, indem man durch den Berührungspunkt ein Perpendikel zur Ebene der Normalen zieht.

Für Revolutionsoberflächen, ist dieses Verfahren dem ersteren vorzuziehen, weil dann die Normalen leichter als die Berührungsebenen zu bestimmen sind.

115. Da sich alle diese Constructionen nach der Methode der Projectionen vollführen lassen, so hat man wohl zu beachten, daß die Projectionen der Tangente irgend einer Curve, zugleich die Tangenten zu den Projectionen dieser Curve sein werden. Diese Folgerung ergibt sich sofort, sobald man die Tangente als unbestimmte Verlängerung eines Curvenelements ansieht. Denn dann ist es klar, daß indem man ein Curvenelement, z. B. auf die Horizontalebene projicirt, ein Element der Projection dieser Curve erhalten wird, und daß folglich durch Verlängerung dieser zwei Elemente, zwei Gerade sich ergeben, davon die zweite die Projection der ersten sein wird; d. h. die Projectionen der Tangente einer Curve, sind Tangenten zu den Projectionen dieser Curve.

116. Es kann auf dem Durchschnitte zweier Oberflächen Punkte geben, für welche die vorigen Constructionen ungenügend sind. Zuvörderst kann sich darin ein Punkt finden, so daß die Berührungsebenen der zwei Oberflächen sich decken, dergestalt daß man statt zweier, die Tangente enthaltenden Berührungsebenen, nur eine einzige erhält. In diesem Falle kann man zur Bestimmung der Tangente selten eine andere Methode befolgen, als daß man mechanisch, vermittelst des Lineals, Tangenten zu den Projectionen des Durchschnits führt. Zweitens kann ein Durchschnittpunkt so liegen, daß die beiden, die Tangente bestimmenden Berührungsebenen, einer der Projectionsebenen perpendikulär sind. Dann ist die Tangente selbst perpendikulär zu dieser Ebene, und projicirt sich in einem einzigen Punkte. Die Tangente zur Projection des Durchschnits bleibt folglich gänzlich

unbestimmt, und läßt sich am häufigsten nur durch ein mechanisches Verfahren darstellen.

Indessen ist es in diesen besonderen Fällen rathsam, die Tangente zum Durchschnitt, für einen, dem fraglichen Punkte sehr nahe liegenden Punkt zu betrachten; hierauf anzunehmen, daß der zweite Punkt sich dem ersten unbestimmt nähert, und zu untersuchen, ob es nicht eine leicht zu construirende Gerade giebt, zu welcher die Tangente sich hinneigt, und mit welcher sie sich an der Gränze vereinigt; diese Gerade wird keine andere als die gesuchte Tangente sein.

Durchschnitte krummer Oberflächen durch Ebenen.

117. Aufgabe I. Durchschnitt eines, zur Horizontalebene, perpendikulären Cylinders durch eine, zur Verticalebene perpendikuläre Gerade.

Die Auflösung wird drei gesonderte Abtheilungen enthalten. In der ersten wird man die Projectionen der Durchschnittscurve und diejenigen irgend einer ihrer Tangenten bestimmen; in der zweiten diese Curve in wahrer Gröfse finden; endlich in der dritten, den Cylinder auf eine Ebene entwickeln, zu sehen, was dann aus der Durchschnittscurve wird, und welches die Tangente zur neuen Curve ist.

Projectionen. Der Aufgabe gemäfs, kann die horizontale Trace des Cylinders eine beliebige Curve $abc \dots$ (Aufgaben der dritten Abtheilung Fig. 1) sein, und seine Erzeugenden sind vertical; die verticale Trace der schneidenden Ebene ist irgend eine Gerade qp' , und deren horizontale Trace qp ein Perpendikel zur Projectiionsaxe xy . Jede auf dem Cylinder liegende Linie hat zur horizontalen Projection die Curve $abc \dots$, und jede in der Ebene pqp' gelegene Linie, die Gerade qp' zur Verticalprojection; man kennt also schon die Projectionen der

Durchschnittscurve. Man nehme einen Punkt m auf $abc \dots$ willkürlich, und ziehe $mm''m'$ perpendicular zu xy , wodurch pq' in m' geschnitten wird. Es leuchtet ein, daß $m'm''$ die Verticalprojection der, durch m gehenden Erzeugenden ist, und daß der Durchschnittspunkt derselben und der Ebene pqp' , m und m' zu Projectionen hat; folglich sind m und m' die Projectionen eines Punktes der Durchschnittscurve. Durch Wiederholung dieses Verfahrens, kann man die Projectionen beliebig vieler Punkte finden.

Die Tangente zu irgend einem dieser Punkte ist leicht zu erhalten. Betrachten wir den Punkt $[m, m']$. Die Berührungsebene am Cylinder für diesen Punkt ist vertical und hat zur horizontalen Trace die Tangente mn , zur Basis $abc \dots$; nun aber ist die gesuchte Tangente der Durchschnitt dieser Ebene mit der gegebenen Ebene; folglich sind mn und qp' die Projectionen dieser Tangente.

Wahre Gröfse. Es werde die Ebene pqp' auf eine der Projectionsebenen umgeklappt. Dreht man sie um die Trace qp' , so ist zu bemerken, daß der Punkt $[m, m']$ im Raume auf einem Perpendikel zu qp' liegt, von m' um den Betrag mm'' entfernt; dergestalt, daß wenn man auf qp' das Perpendikel $m'M$ gleich mm'' errichtet, der Punkt M zur gesuchten Curve gehören wird. Durch die nämliche Construction verschafft man sich beliebig viele Punkte, und findet so die Curve $ABC \dots$. Um die Tangente dieser Curve für den Punkt M zu erhalten, genügt es, zu beachten, daß in der Umklappung die Linie qn , ohne ihre Gröfse zu verändern, nach qN perpendicular zu liegen kommt; so daß durch das Ziehen von MN die Tangente des Punktes M erhalten wird.

Beabsichtigt man eine Drehung der Ebene pqp' um ihre horizontale Trace pq , so ziehe man mr perpendicular zu pq , und denke sich im Raume eine Gerade zwischen dem Punkte r und dem Punkte $[m, m']$; diese Gerade ist perpendicular zu pq , und in wahrer Gröfse auf qm' projicirt; man wird folglich mr um die Gröfse $rM' = qm'$

verlängern, und der Punkt M' wird ein Punkt, der auf die Horizontalebene umgeklappten Curve sein. Ein ähnliches Verfahren kann für alle diese Punkte angewendet werden. Die Tangente anlangend, so geht sie unverändert durch den Punkt n , und man erhält sie durch das Ziehen der Geraden nM' .

Man hat nicht immer einen genügend ausgebreiteten Raum, um eine der zwei Umklappungen wie oben auszuführen; dieser Schwierigkeit begegnet man folgendermaßen. Durch einen auf qp' gewählten, passenden Punkt d' , fälle man ein Perpendikel zur Verticalebene, welches gänzlich in der Ebene pqp' gelegen, und zur Horizontalprojection eine, zu xy perpendikuläre Gerade $d'd'$ haben wird. Dreht man nun die Ebene pqp' um diese Gerade, bis sie horizontal geworden ist, so projecirt sich dann die in dieser Ebene liegende Gerade in wahrer Gröfse auf die Horizontalebene. Nun aber ist diese Projection leicht darzustellen. Denn, nach der Drehung der Ebene pqp' befindet sich die Linie qp' in uv parallel zu xy , und zugleich beschreibt der Punkt $[m, m']$ parallel zur Verticalebene, einen Bogen dessen Verticalprojection der aus dem Mittelpunkte d' beschriebene Bogen $m'm$ ist, und dessen Horizontalprojection auf mr parallel zu xy liegt; zieht man folglich auf xy , durch den Punkt m_r , ein von mr begränztes Perpendikel m_rM'' , so erhält man die Projection des Punktes $[m, m']$, so wie dieser liegt, wenn die Curve horizontal geworden ist. Wird das nämliche Verfahren auf andere Punkte angewendet, so erhält man die Curve $A''B''C'' \dots$

Der Berührungspunkt befindet sich nun in M'' . Zur Erlangung der Tangente, kann man mittelst der nämlichen Construction einen zweiten Punkt N'' bestimmen. Man kann aber noch bemerken, dafs der Punkt darin sie die Axe schneidet, um welche die Drehung geschah seine Lage nicht verändert hat. Nun aber ist derselbe zuvor in o projecirt gewesen, im Begegnungspunkte von

mn mit $d'd$; folglich muß die Tangente des Punktes M'' durch o gehen.

Entwicklung. Wird der Cylinder als ein Prisma von unendlich vielen Seitenflächen angesehen, so sieht man auf der Stelle ein, daß wenn man diese Oberfläche auf einer Ebene entwickelt, jeder zu den Kanten perpendikuläre Durchschnitt, eine Gerade werden wird, zu welcher die Kanten noch perpendikulär bleiben, und daß die, auf diesen Kanten zwischen dem perpendikulären und schiefen Schnitte eingeschlossenen Längen, nicht geändert werden dürfen. Nachdem man folglich die Curve $abc \dots$ in mehrere Bogen $ab, bc, cd \dots$ getheilt hat, so nehme man auf einer Geraden die Distanzen $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\delta, \dots$ beziehentlich diesen Bogen gleich, und errichte dann auf dieser Geraden die Perpendikel $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma', \dots$ den Kantenstücken gleich, deren wahre Längen in der Verticalebene auf $a''a', b''b', c''c', \dots$ liegen. Es wird die so, durch Entwicklung des Cylinders entstandene Curve, $\alpha'\beta'\gamma' \dots$ sein.

Man setze, der Punkt $[m, m']$ sei nach μ' gekommen, und bemerke, daß in der Entwicklung die Curvenelemente, und folglich die Tangenten, ihre Neigung in Bezug auf die Kanten nicht ändern. Nun aber geht die Tangente des Punktes $[m, m']$ durch n , und der Winkel dieser Tangente mit der Kante des Cylinders ist Bestandtheil eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Basis mn und Höhe $m''m'$ ist; nimmt man folglich auf der schicklichen Seite $\mu\nu = mn$, und zieht die Verbindende $\mu'\nu$ so ergibt sich die Tangente zur neuen Curve $\alpha'\beta'\gamma' \dots$

Bemerkungen. In der Zeichnung ist die Curve $abc \dots$ ein Kreis, die vorige Erklärung aber nichts desto weniger allgemein. Was immer folglich $abc \dots$ für eine Curve sein mag, stets wird es sich ereignen, daß die Tangenten in m und M' , zu den Curven $abc \dots$ und $A'B'C' \dots$, die Trace pq im nämlichen Punkte n schneiden, oder was das Nämliche ist, die Tangenten in m und M'' zu den Curven $abc \dots$ und $A''B''$

C'' , schneiden die Gerade $d'''d$ im nämlichen Punkte o . Hieraus geht folgender bemerkenswerther Lehrsatz hervor.

Wird irgend ein Cylinder durch mehrere Ebenen geschnitten, welche durch eine, zu den Erzeugenden perpendikuläre Gerade gehen, und klappt man alle diese Durchschnitte, dieselben um diese Gerade drehend, auf eine einzige Ebene um, so begegnen, die Tangenten zu diesen verschiedenen Curven, für Punkte, die auf einem Perpendikel zu dieser gemeinschaftlichen Geraden liegen, dieser Geraden in einem einzigen Punkte.

Diese Eigenthümlichkeit hat ihres Gleichen in den bekannten, auf einer gemeinschaftlichen Axe beschriebenen Ellipsen; doch findet sie in Betreff dieser Ellipsen nur statt, weil sie die Durchschnitte des nämlichen Cylinders durch, obiger Aufgabe gemäß, angeordnete Ebenen sind.

118. Aufgabe II. Durchschnitt irgend eines Cylinders durch eine, zu dessen Erzeugenden perpendikuläre Ebene.

Projectionen. Gesetzt, die horizontale Trace des Cylinders sei abc (Fig. II), und man habe die Gränzen der Projectionen dieses Cylinders wie in Nr. 76 bestimmt. Da die schneidende Ebene den Erzeugenden perpendikulär ist, so müssen ihre Tracen perpendikulär zu den Projectionen dieser Linien sein; nehmen wir, sie wären pq und qp' . Zunächst besteht die Forderung darin die Projectionen des im Cylinder geschehenen Schnittes zu finden, welcher hier gerader Schnitt heißt, weil die schneidende Ebene perpendikulär zum Cylinder ist.

Nach Inhalt der Nr. 109, muß man die Durchschnitte der Erzeugenden des Cylinders mit der Ebene pqp' suchen. Man betrachte z. B. die Erzeugende $[ae, a'e']$, und denke sich eine verticale Ebene durch diese Gerade. Die Horizontalprojection des Durchschnitts dieser Ebene

mit pp' ist ae , und es ergibt sich ein Punkt der Verticalprojection indem man hh' perpendicular zu xy fällt. Um einen anderen zu erhalten, ziehe man durch irgend einen Punkt $[z, z']$ der Trace qp' eine Parallele $[zo, z'o']$ zu pq ; und es leuchtet ein, daß der Durchschnitt o , von zo mit ae die Horizontalprojection eines, beiden Ebenen gemeinschaftlichen Punktes ist. Daraus folgert man die Verticalprojection o' dieses Punktes, und hierauf $h'o'$, die, derjenigen Geraden, in welcher sich die beiden Ebenen schneiden. Folglich ist es der Durchschnitt von $a'e'$ mit $h'o'$ wodurch die Verticalprojection e' eines Punktes des geraden Schnittes bekannt wird, und mithin die Horizontalprojection e .

Indem man wie zuvor, verticale Ebenen durch verschiedene Erzeugende führt, so schneiden sie die Ebene ppp' in, unter sich parallelen Geraden, und deren Verticalprojectionen sind folglich parallel zu $h'o'$. Die Durchschnitte dieser Parallelen mit den Verticalprojectionen der Erzeugenden bestimmen auch beliebig nahe liegende Punkte, dergestalt, daß die Projectionen des geraden Schnittes als bekannt angesehen werden müssen.

Gesetzt, man wollte die Tangente zum Schnitt für den Punkt $[m, m']$ haben. Zieht man durch den Fußpunkt k der, diesen Punkt enthaltenden Erzeugenden kr berührend zur Basis, so wird kr die horizontale Trace der Berührungsebene an den Cylinder sein. Nun aber liegt die verlangte Tangente zugleich in dieser Ebene und in der Ebene ppp' ; mithin gehört der Punkt r , daselbst kr , qp trifft, zu dieser Tangente; folglich ist mr die Horizontalprojection der Tangente. Die Verticalprojection ergibt sich, indem man rr' perpendicular auf xy fällt und $m'r'$ zieht.

Wahre Gröfse. Man drehe die Ebene ppp' um pq , damit sie auf die Horizontalebene zu liegen kommt. Da mn perpendicular zu pq ist, so ist die im Raume den Punkte n verbindende Gerade auch perpendicular zu pq ,

und sie wird es noch nach der Umklappung sein; construirt man folglich ihre wahre Länge um sie in nM auf die Verlängerung von mn aufzutragen, so wird der Punkt M zur umgeklappten Curve gehören. Durch Wiederholung dieses Verfahrens bestimmt man die Curve EFG Die Tangente anlangend, so hört sie nicht auf, durch den Punkt r zu geh'n, und folglich wird sie nach der Umklappung rM sein.

Entwicklung. Entwickelt man den Cylinder auf einer Ebene, so ist es klar, daß der gerade Schnitt EFG eine gerade Linie werden wird, und daß sich die zwischen dieser Curve und der Basis abc inne liegenden Distanzen nicht ändern. Nun aber sind diese Distanzen leicht zu finden, da man ihre Projectionen kennt; folglich errichte man, nachdem man auf irgend einer Geraden Abstände ϕ , $\phi\gamma$, ... beziehentlich den Bogen EF , FG , ... gleich genommen hat, die, diesen Distanzen gleichen Perpendikel ϵA , ϕB , γC , ..., und erhält so, die aus abc durch die Wirkung der Entwicklung entstehende Curve ABC

Angenommen, die Ordinate μK entspreche der Projection mk , und man verlangt die Tangente zum Punkte K der Curve ABC Man wird wahrnehmen, daß es im Raume ein, krm zur Projection habendes rechtwinkliges Dreieck giebt, dessen Hypothenuse kr , eine Kathete gleich rM , und dessen andere gleich μK ist. Nun aber muß die verlangte Tangente mit μK denselben Winkel bilden, wie kr mit der Erzeugenden des Cylinders; darum nehme man $\mu\phi = Mr$, und ϕK wird die geforderte Tangente sein.

Bemerkung. Sobald der Schnitt schief zu den Erzeugenden ist, so findet man die Projectionen der Curve und der Tangente durch, den vorigen ähnliche Constructionen. Um aber die Curve auf die Horizontalebene umzuklappen, muß man die Projectionen zeichnen, und die wahren Größen der, von verschiedenen Punkten dieser Curve, auf die horizontale Trace der schneidenden Ebene,

gefällten Perpendikel. Die Entwicklung des Cylinders betreffend, so muß man, um sie zu bewerkstelligen, vorläufig den geraden Durchschnitt suchen, und ihn in einer geraden Linie entwickeln, wie dieß vorhin geschah; da die Punkte des schiefen Schnittes stets in denselben Entfernungen vom geraden Schnitt bleiben müssen, so wird es leicht sein, dieselben in die Entwicklung einzutragen.

119. Aufgabe III. Schnitt eines Kegels, durch eine, zur Verticalebene perpendikuläre Ebene.

Projectionen. Es leuchtet ein, daß die Verticalprojection des Schnittes mit der verticalen Trace der schneidenden Ebene pqp' (Fig. III) einerlei ist. Sind om , $o'm'$ die Projectionen irgend einer Erzeugenden des Kegels, dann ist es leicht die Projectionen n , n' ihres Durchschnitts mit der Ebene pqp' zu finden; und indem man diese Construction für beliebig viele Erzeugende wiederholt, so erhält man die Horizontalprojection efg des conischen Schnittes.

Der in der Zeichnung dargestellte Kegel ist gerade, von kreisförmiger Basis und verticaler Axe, und die eine der zwei, zur Verticalebene parallelen Erzeugenden in oa , $o'a'$, die andere in od , $o'p'$ projecirt. In diesem Falle kann man noch die Punkte der Curve efg dadurch erhalten, indem man den Kegel durch horizontale Ebenen schneidet; es sei $h'i'$ die verticale Trace einer solchen Ebene. Diese Ebene schneidet den Kegel in einem Kreise dessen Horizontalprojection ein, um den Mittelpunkt o mit dem, der $h'i'$ gleichen Durchmesser, beschriebener Kreis ist; und sie schneidet die Ebene pqp' in einem Perpendikel zur Verticalebene, wovon man leicht die Horizontalprojection nn_r erhält. Die Durchschnittspunkte n und n_r dieses Perpendikels mit dem Kreise, gehören zur Horizontalprojection des conischen Schnittes. Andere horizontale Ebenen ziehen andere Punkte nach sich. Es dürfte die Bemerkung nicht überflüssig sein, daß die, auf der zu xy perpendikulären Linie oo'' liegen-

den Punkte, durch diese Construction als gegeben angesehen werden können, während sie sich der ersten entziehen.

Um die Tangente des Punktes n der Curve $efg \dots$ zu erhalten, ziehe man zur Basis des Kegels die Tangente mr , d. i. die horizontale Trace der Berührungsebene für den Punkt $[n, n']$ des conischen Schnittes. Der Punkt r , wo mr pq trifft, gehört zu der Tangente, welche zum Punkt $[n, n']$ des conischen Schnittes gezogen sein würde; folglich ist nr die Projection dieser Tangente, oder was das Nämliche, nr ist die Tangente zur Projection $efg \dots$ des conischen Schnittes (115).

Wahre Gröfse. Klappt man die Curve auf die Vertical- oder Horizontalebene um, so sind die Constructionen die nämlichen wie in der vorigen Aufgabe. Vermittelt der erwählten, gegebenen Stücke erhält man eine Ellipse, deren grofse Axe gleich $e'k'$ ist. Man wird nun die kleine Axe finden, indem man die Punkte der Curve sucht, welche ihre Verticalprojection im Mittel von $e'k'$ liegend haben, was keinerlei Schwierigkeit darbietet.

Entwicklung. Unter der Voraussetzung, worauf die Figur sich gründe, d. h. indem der Kegel als gerade angenommen wird, denke man sich, dieser Kegel werde in der, dem Punkte a entsprechenden Kante eröffnet, und auf eine Ebene entwickelt. Alle vom Scheitel um den Betrag $o'a'$ entfernten Punkte der Basis $abc \dots$ werden auf einen, mit dem Halbmesser $o'a'$ beschriebenen Bogen zu liegen kommen, und auf demselben zwischen sich Stücke von derselben Länge wie auf dem Umfange $abc \dots$ absondern. Es sei $\alpha\beta\gamma \dots$ ein, mit dem Halbmesser $o'a' = o'a'$ beschriebener Bogen; angenommen, der Umfang $abc \dots$ wär' vorläufig in solche Bogen wie $ab, bc, \dots$ getheilt, so nehme man auf diesen Bogen Unterabtheilungen, klein genug, um sie als gerade Linien ansehen zu können, und trage diese Theile auf den Bogen $\alpha\beta\gamma \dots$. Auf diese Weise ist es leicht die, den Bogen $ab, bc, \dots$ annähernd gleichen Bogen $\alpha\beta, \beta\gamma, \dots$

zu erhalten, und einleuchtend, daß in Folge der Entwicklung die, den Punkten $a, b, c, \dots$ entsprechenden Erzeugenden mit $\omega\alpha, \omega\beta, \omega\gamma, \dots$ übereinkommen werden.

Die auf diesen Erzeugenden liegenden Punkte des conischen Schnittes, dürfen ihre Entfernungen vom Scheitel nicht ändern; nun aber leuchtet ein, daß diese Erzeugenden auf der Linie $o'a'$, zwischen dem Punkte o' und den, zu xy , durch die Projectionen $e', f', g', \dots$ gezogenen Parallelen, gegeben sind; trägt man folglich diese Entfernungen in $\omega\alpha, \omega\phi, \omega\chi, \dots$ auf, so bestimmt man die Curve $\phi\chi, \dots$ in welche sich der conische Schnitt nach der Entwicklung umgestaltet.

Die Tangente ergibt sich wie beim Cylinder, indem man beachtet, daß vor und nach der Entwicklung, jedes Element des conischen Schnittes stets mit der angränzenden Erzeugenden denselben Winkel bildet. Angenommen, z. B. der Punkt v entspreche dem Punkte $[n, n']$ des conischen Schnittes. Die Tangente in diesem letzten Punkte ist die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete mr ist, und dessen andere die in mn projecirte Kathete $\mu\nu$ zur wahren Gröfse hat; errichtet man folglich zu $\mu\nu$ das Perpendikel $\mu\rho$ gleich mr , und verbindet die Punkte v und ρ , so wird die Gerade $v\rho$ zur neuen Curve $\phi\chi, \dots$ berührend sein.

Für irgend einen Kegel, läßt sich die Entwicklung nicht mehr mittelst eines solchen Kreissectors wie $\omega\alpha\alpha$, ausführen. Dann ist das Einfachste die Basis $abc, \dots$ in so kleine Theile zu theilen, daß man diese Theile als gerade Linien, und den Kegel als eine Pyramide ansehen kann. Leicht ergeben sich die drei Seiten jeder Seitenfläche der Pyramide; man wird folglich successiv alle diese Seitenflächen darstellen können, und so die Entwicklung des Kegels erhalten. Es ist gleichfalls leicht, Entfernungen des Scheitels des Kegels von verschiedenen Punkten des conischen Schnittes zu erhalten, und hierauf die durch diesen Schnitt in der Entwicklung

hervorgegangene Curve zu finden. Was die Tangente betrifft, so bestimmt sie sich, indem man auf $\mu\nu$ ein schiefwinkeliges Dreieck construirt, dessen eine Seite $\mu\rho$ noch gleich mr ist, aber dessen dritte Seite $\nu\rho$ sich aus den zwei Projectionen nr und $n'q$ folgern lässt. *)

Bemerkung. Gröfserer Einfachheit wegen, setze man in der Aufgabe die schneidende Ebene perpendicular zur Verticalebene. Giebt man ihr irgend eine Lage, so werden die Constructionen verwickelter, ohne schwieriger zu sein.

120. Aufgabe IV. Durchschnitt eines Kegels und einer Ebene, für den Fall wo die Durchschnittscurve Asymptoten hat.

Die schneidende Ebene pqp' (Fig. IV) sei stets perpendicular zur Verticalebene, und es werde bedungen, dafs eine durch den Scheitel gelegte parallele Ebene $o'm'm$, den Kegel in den zwei Erzeugenden $[om, o'm']$ und $[on, o'm']$ schneidet. Die diesen Erzeugenden sehr nahe liegenden, werden noch durch die Ebene pqp' geschnitten, wenn auch in sehr grofsen Entfernungen, dergestalt dafs die in der Ebene $mm'o'$ liegenden, als solche angesehen werden können, deren Durchschnitte in unendlich grofser Entfernung sich befinden. Hieraus folgert man, dafs der conische Schnitt unendliche Aeste haben mufs. Sonst werden sich hier alle Constructionen der vorigen Aufgabe wiederholen. In der Zeichnung ist es ein gerader Kegel, welchen man als Beispiel wählte, und der Schnitt eine Hyperbel. Es ist die Umklappung nur auf die Verticalebene geschehen, und man hat nur den untern Mantel des Kegels entwickelt.

*) Bei Entwicklung irgend eines Kegels kann man sich auch einer Hülfskugel bedienen, deren Mittelpunkt im Scheitel des Kegels liegt. Es ist dieses Verfahren in mehreren Schriften erörtert worden, auch im § 88 meiner Elemente der Projectionslehre. Leipzig, Weidmannsche Buchhandlung. 1844.

Das vorzüglich ins Auge zu fassende Object besteht darin, die Asymptoten der Curve zu bestimmen, oder mit anderen Worten, die Tangenten für unendlich weit entfernte, auf den zur Ebene pqp' parallelen Erzeugenden, liegenden Punkte. Denkt man sich nun eine beliebige Tangente an die Curve gezogen, und den Berührungspunkt unendlich weit hinaus verrückt, so wird diese Tangente, an der Gränze zur Asymptote; daher muß man zur Bestimmung der Asymptoten genau dieselben Constructionen verwenden, als wie zu jeder anderen Tangente, und dieß ist es, was wir nun ausführen werden.

Die Tangente in einem beliebigen Punkte des conischen Schnittes ist der Durchschnitt der Ebene pqp' mit der, an den Kegel in der, den Berührungspunkt enthaltenden Erzeugenden, gelegten Berührungsebene (113). Darum ziehe man zur Basis abc die Tangenten mr und ns , so werden diese die horizontalen Tracen der Berührungsebenen sein, welche durch die Erzeugenden gehen, worauf die unendlich weit liegenden Curvenpunkte sich befinden (79); und die Durchschnittspunkte r und s dieser Tracen mit pq' gehören den Asymptoten an. Um dann die Asymptoten zu erhalten, muß man diese Punkte mit den Berührungspunkten verbinden, d. h. durch die Punkte r und s Parallelen zu den Erzeugenden $[om, o'm']$ und $[on, o'n']$ führen; zieht man folglich rr_1 und ss_1 parallel zu om und on , so hat man die Horizontalprojectionen der Asymptoten. Hierauf folgert man leicht die Asymptoten RR_1 , SS_1 , der in wahrer Grösse umgeklappten Curve; und auch die Asymptoten Θ_ρ , Θ_σ , zu der durch die Entwicklung des conischen Schnittes entstandenen Curve.

121. Aufgabe V. Schnitt einer Revolutionsoberfläche durch eine Ebene. Man wird die Constructionen auf die windschiefe Revolutionsoberfläche anwenden.

Man ziehe eine Folge von zur Axe perpendicularen,

und auch beliebig nahen Ebenen; jede derselben schneidet die gegebene Ebene in einer Geraden, und die Revolutionsoberfläche in einem Kreise. Die der Geraden und dem Kreise gemeinschaftlichen Punkte gehören zum gesuchten Durchschnitt.

Es werde die windschiefe Revolutionsoberfläche, der Aufgabe gemäß, als Beispiel genommen, und das Gegebene gewählt, wie dieß Fig. V zeigt. Die Axe ist vertical, ihre horizontale Projection der Punkt o , ihre verticale die Linie $o'o''$; die in paralleler Lage zur Verticalebene genommene Erzeugende hat ab und $a'b'$ zu Projectionen, oder auch ac und $a'c'$; endlich ist die schneidende Ebene pqp' perpendicular zur Verticalebene. Je nach der Lage dieser Ebene, kann der Schnitt eine Ellipse, eine Hyperbel oder eine Parabel sein; und es giebt ein leichtes Mittel zu erkennen, welche dieser drei Curven man erhalten muß. Nach der Anmerkung II der Nr. 70, wird man die Erzeugende der windschiefen Oberfläche parallel zu sich selbst in einen Punkt der Axe, z. B. den in a' projecirten bringen, dann annehmen, daß dieselbe einen Kegel um die Axe beschreibt, durch den Scheitel eine der gegebenen Ebene parallele Ebene führen, und je nachdem diese Ebene den Kegel in einem Punkte, in zwei Geraden, oder in einer einzigen schneidet, schliessen, daß der gesuchte Schnitt eine Ellipse, eine Hyperbel oder eine Parabel ist. In dem durch die Figur dargestellten Falle ist es eine Ellipse, welche man zu suchen hat.

Zieht man or parallel zu xy , so leuchtet ein, daß die in or und $o'q$ projecirte Gerade die gesuchte Curve in zwei symmetrische Hälften theilt, d. h. sie ist eine Axe der Curve; es werden zuvörderst die auf dieser Axe liegenden Punkte der Curve bestimmt, welche man Scheitel nennt. Denkt man sich, die Linie $[or, o'q]$ erzeugt einen geraden Kegel um die Revolutionsaxe, so beschreibt jeder Scheitel eine Parallele zur windschiefen Oberfläche, und gelangt successiv auf alle Erzeugenden

dieser Oberfläche. Befindet er sich auf der Erzeugenden $[ab, a'b']$, so muß die Linie $[or, o'q]$ in der durch diese Erzeugende und den Punkt $[o, o']$ geführten Ebene liegen. Indem man die Parallele $[oz, o'z']$ zu $[ab, a'b']$ zieht, findet man für diese Ebene die horizontale Trace bz , welche den, mit dem Halbmesser or beschriebenen Kreis in u und v schneidet; hieraus ist zu schließen, daß die Linie $[or, o'q]$ durch Drehung, in dieser Ebene zwei verschiedene Lagen einnehmen kann, welche ou und ov zu horizontalen Projectionen haben. Dann schneidet man die Erzeugende $[ab, a'b']$ in, bei d und e projecirten Punkten, und diese Punkte sind die Lagen, welche die gesuchten Scheitel auf dieser Erzeugenden einnehmen müssen. Es ist folglich nur noch ou und ov zu drehen, um die Punkte u und v nach r zurückzuführen; und bringt man dann die Punkte d und e nach F und g , so werden die Punkte F und g die Horizontalprojectionen der gesuchten Scheitel sein, deren Verticalprojectionen F' und g' nun gefolgert werden.

Zwischen diesen beiden Scheiteln müssen horizontale Ebenen geführt werden, welche zur Auffindung der Curvenpunkte dienen. Es sei z. B. $h' i'$ die verticale Trace einer dieser Ebenen; man bestimmt leicht die Horizontalprojectionen hh_r , und i , ihrer Durchschnitte mit der Ebene pqp' und der Geraden $[ab, a'b']$. Beschreibt man folglich mit dem Halbmesser oi aus dem Mittelpunkte o einen Umkreis, so erhält man die Horizontalprojection des Kreises darin die Hülfebene die windschiefe Oberfläche schneidet. Die Durchschnittspunkte h, h_r , dieses Umkreises mit der Linie hh_r , gehören zur Horizontalprojection der gesuchten Curve.

Um die Tangente für einen beliebigen Punkt $[h, h']$ zu erhalten, bestimme man, durch die vermöge Nr. 97 bekannte Methode, die horizontale Trace st der Berührungsebene zur Oberfläche; der Durchschnittspunkt t dieser Trace mit pq gehört zur Tangente, und indem man

t und h verbindet, so ergibt sich die Horizontalprojection dieser Tangente.

Die Umklappung anlangend, so findet sie sich wie in den vorigen Aufgaben; dieselbe ist, die Curve $FHGH_r$.

Bemerkung. Die zur Bestimmung der Scheitel angewendete Construction ist einer sorgfältigen Beachtung werth. Sie gewährt die Lösung folgender Aufgabe: Die Durchschnittspunkte einer windschiefen Revolutionsoberfläche mit einer beliebigen, durch einen Punkt der Axe gelegten Geraden zu finden.

122. Aufgabe VI. Schnitt der windschiefen Revolutionsoberfläche durch eine Ebene, für den Fall, wo dieser Schnitt eine Hyperbel ist. Bestimmung der Asymptoten.

Das Mittel, um zu erkennen ob der Schnitt eine Hyperbel ist, wurde bereits angezeigt; setzen wir, der Fall sei derjenige der Figur VI, und überdieß das Gegebene so angeordnet wie früher. Da die Gerade $[or, o'q]$ noch immer eine Axe der Durchschnittscurve ist, so bestimme man auf die nämliche Art die Scheitel $[f, f']$ und $[g, g']$, und man hat nun ausserhalb dieser Punkte die horizontalen Ebenen zu führen; welche zur Auffindung der Curvenpunkte dienen.

Der einzige besondere Umstand dieses uns beschäftigenden Falles besteht in der Bestimmung der Asymptoten, d. h. der Tangenten, davon der Berührungspunkt einer jeden im Unendlichen liegt. Da nun irgend ein Punkt der Curve aus dem Durchschnitte der gegebenen Ebene pqp' mit einer Erzeugenden der Oberfläche hervorgeht, so ergibt sich die Tangente, indem man den Durchschnitt der Berührungsebene dieses Punktes mit der Ebene pqp' nimmt. Diese Constructionen sind es folglich, welche man für die im Unendlichen liegenden Punkte anzuwenden hat. Da dieselben durch die, zur Ebene pqp' parallelen Erzeugenden gegeben sind, so muß man zuvörderst diese Linien bestimmen.

Die Construction, welche zu erkennen giebt, ob der

Schnitt eine Hyperbel ist, erleichtert diese Bestimmung. Gesetzt der Punkt $[o, a']$ sei der Scheitel des, um die Axe, durch eine Parallele zur Erzeugenden $[ab, a'b']$ beschriebenen Kegels, und $a'm'm$ die, durch diesen Scheitel parallel zu pqp' geführte Ebene; darum, weil diese Ebene den Kegel in zwei Geraden schneidet, ist man versichert, daß die gegebene Ebene, die windschiefe Oberfläche in einer Hyperbel trifft (70). Man ziehe die Basis des Kegels, und bestimme die Horizontalprojectionen om und on dieser beiden Geraden. Jede Erzeugende der windschiefen Oberfläche muß ihre Parallele auf dem Kegel haben (68); mithin sind die zur Ebene pqp' parallelen, auch den beiden fraglichen Geraden parallel; folglich ergeben sich ihre Horizontalprojectionen, indem man Tangenten zum Kehlkreis, beziehentlich parallel zu om und on zieht.

Da man nun auf der windschiefen Oberfläche die Erzeugenden kennt, welche von der Ebene pqp' in unendlich weit entfernten Punkten getroffen werden, so muß man, um die Asymptoten zu erhalten, auf diese Punkte die allgemeinen, zur Erlangung irgend einer Berührungsebene dienlichen Constructionen anwenden. Die zwei Erzeugenden deren Projectionen parallel zu om sind, müssen als im Unendlichen in einen Punkt zusammenlaufend angesehen werden, und die Punkte h und i wo sie die Horizontalebene durchdringen, bestimmen die horizontale Trace hi der Berührungsebene im Begegnungspunkte. Die Tangente zur Hyperbel in diesem Punkte, oder mit anderen Worten, eine der gesuchten Asymptoten, ist der Durchschnitt dieser Berührungsebene mit der Ebene pqp' ; folglich gehört der Punkt s , daselbst hi pq trifft, zu dieser Asymptoten. Um sie zu erhalten erübrigt, s mit dem Berührungspunkt zu verbinden, d. h. man muß eine Parallele zu den, diesen Punkt enthaltenden Erzeugenden führen; folglich ist die, zu om parallele Gerade ss_1 , die Horizontalprojection einer der Asymptoten. Aehnlich so, findet man tt_1 , als diejenige der an-

deren Asymptote. Die Verticalprojectionen dieser Linien liegen auf qp' , und ihre Umklappungen sind SS , und TT .

Bemerkungen. Die Punkte m, h, i liegen in gerader Linie; und der Grund davon ist, weil die sich bis zu diesen Punkten erstreckenden Geraden die Ebene des Kehlkreises im nämlichen Durchmesser treffen. Hierüber kann man noch bemerken, daß die Berührungsebenen zur windschiefen Oberfläche die Berührungsebenen für den Kegel zu Gränzen haben. Die Punkte n, k, l liegen auch in gerader Linie.

Indem man die Ebene pqp' dem Punkte a' hinreichend nähert, so schneidet sie den Umfang des Kehlkreises, und dann werden die Aeste der Hyperbel durch die Gerade $[or, o'q]$ nicht mehr getroffen. Fiel' die zu $o'q'$ parallele $a'm$, mit $a'c'$ oder mit $a'b'$ zusammen, so würde der Schnitt eine Parabel sein. Da diese Fälle keinerlei Schwierigkeiten darbieten, so wollen wir uns mit deren Entwicklung nicht aufhalten.

Durchschnitte krummer Oberflächen unter sich.

123. Aufgabe VII. Durchschnitt zweier Cylinder.

Man wird die Hülfebenen den Erzeugenden beider Cylinder parallel nehmen, weil dann jede dieser Ebenen die Cylinder nur in Erzeugenden schneiden kann, woraus folgt, daß die Punkte des verlangten Durchschnitts durch Bewegungen gerader Linien gegeben sein werden. Zieht man folglich durch einen willkürlichen Punkt $[a, a']$ (Fig. VII — 1), Parallelen zu den Erzeugenden beider Cylinder, und construirt die horizontale Trace bc der Ebene dieser Geraden, so müssen die Tracen der Hülfebenen parallel zu bc sein.

Angenommen, eine dieser Tracen begegne den Basen der Cylinder in d, e, f, g ; man ist gewiss, daß

die, durch diese Punkte gehenden Erzeugenden in der nämlichen Ebene liegen, und dafs folglich die Durchschnittspunkte dieser Projectionen zu den Projectionen des Durchschnitts der zwei Cylinder gehören. Daher, construire man die Horizontalprojectionen, dieser Erzeugenden, wodurch vier Punkte h, i, k, l bestimmt werden, ferner die Verticalprojectionen dieser Erzeugenden, was die vier Punkte h', i', k', l' giebt; und man hat hierauf die Projectionen von vier, zum verlangten Durchschnitt gehörenden Punkten. Im Vorbeigeh'n ist zu bemerken dafs, verbindet man h und h' , i und i' , k und k' , l und l' , vier Perpendikel zu xy erhalten werden. Neue Hülfebenen bestimmen so viel andere Punkte als man will, und folglich kennt man die Projectionen des Durchschnitts der Cylinder.

Um die Projectionen der Tangente für irgend einen Punkt zu erhalten, bemerke man, dafs diese Tangente zugleich, zweien durch diesen Punkt an jeden der Cylinder gelegten Berührungsebenen gehört, und dafs sie folglich deren Durchschnitt ist. Gesetzt, es handele sich um den Punkt $[n, n']$, welcher durch zwei, die Basen m und p schneidende Erzeugende bestimmt wird; man führe zu denselben, Tangenten mq und pq , welche die horizontalen Tracen der zwei Berührungsebenen sein werden, verbinde hierauf den Punkt n mit dem Durchschnitt q dieser Tracen, so wird die Linie nq die Horizontalprojection der gesuchten Tangente sein. Die Verticalprojection ergiebt sich, indem man den Punkt q nach q' auf xy projicirt, und $n'q'$ zieht.

Bemerkung. Unter allen den Fällen, welche der Durchschnitt der Cylinder darstellen kann, sind zweie vorzüglich zu unterscheiden; die vollkommene und die theilweise Durchdringung. Bei der ersten gehen alle Erzeugenden des einen Cylinders durch den andern, und dann giebt es eine Ein- und Austrittscurve; bei der zweiten, schneidet nur ein Theil der Erzeugenden jedes Cylinders den anderen. Folgendes zeigt,

wie man erkennt, welcher Fall statt finden wird. — Man denke sich, es wären zur Basis jedes Cylinders, parallel zu bc , zwei Tangenten gezogen worden, welche diese Basis gänzlich zwischen sich enthalten, und setzen zuvörderst, daß wie in Fig. VII—1, die Tangenten rs und uv zu einer der Basen, die andere Basis schneiden. Die Hülfebenen deren Tracen rs und uv sind, enthalten den ganzen ersten Cylinder zwischen sich; vom zweiten aber nur die, den Bogen sev und tdz entsprechenden Stücke. Nun aber ist es klar, daß der erste Cylinder diese zwei Stücke der Oberfläche trifft, und das von jenen Hülfebenen abgesonderte Zwischenstück durchdringt; folglich giebt es eine vollkommene Durchdringung des zweiten Cylinders durch den ersten.

Setzen wir zweitens, daß wie in der Figur VII—2, eine jede Basis durch eine der Tangenten zur anderen Basis geschnitten werde. Dann enthalten die, durch die Tangenten rs und uz geführten Hülfebenen zwischen sich auf den Cylindern, diejenigen Stücke der Oberfläche, welche sich auf die Bogen urv , szt stützen; und es ist klar, daß diese Stücke sich gegenseitig treffen, während die äusseren Stücke keinen Punkt gemein haben; in diesem Falle sagt man es finde eine theilweise Durchdringung statt.

Die hier zur Beurtheilung der vollkommenen oder theilweisen Durchdringung angezeigten Constructionen, bestimmen für einen jeden Cylinder die Erzeugenden, welche zur Begränzung der Durchschnittscurve dienen. So ist in Fig. VII—1 die Eintrittscurve von den, durch die Punkte s und v gehenden Erzeugenden begränzt, und die Austrittscurve, durch jene welche durch die Punkte t und z gehen. In Fig. VII—2 hat die Durchschnittscurve auf dem einen Cylinder die in u und v errichteten Erzeugenden, und auf dem anderen, jene welche durch s und t gehen. Uebrigens zeigt die weiter oben zur Auffindung irgend einer Berührungsebene ertheilte allgemeine Construction, daß diese Erzeugen-

den wirklich Tangenten zur Durchschnittscurve sind. Man denke sich z. B. es werden Berührungsebenen für beide Cylinder gelegt, die eine durch den Punkt r , die andere durch t . Die erste fällt mit der Hülfssebene zusammen deren Trace tr ist; folglich wird sie die zweite in der durch t gehenden Erzeugenden schneiden; folglich berührt diese Erzeugende die Durchschnittscurve. Mithin sind die Projectionen dieser Erzeugenden auch zu denen der Curve berührend, so wie diess die Figur zu erkennen giebt.

124. Aufgabe VIII Durchschnitt zweier Kegel.

Wird eine Folge von Ebenen durch die, beide Scheitel verbindende Gerade gelegt, so schneidet jede dieser Ebenen die Kegel in Geraden deren Durchschnitte Punkte der verlangten Curve geben. Die Tangente irgend eines Punktes dieser Curve wird der Durchschnitt der Berührungsebenen beider Kegel sein.

Man setze, das Gegebene sei in der Figur VIII enthalten, und nenne kleinen Kegel, dessen Basis kleiner, und grossen den, dessen Basis grösser ist. Es sei c der Durchgangspunkt der, die Scheitel verbindenden Geraden $[ab, a'b']$ mit der Horizontalebene, so gehen alle horizontalen Tracen der Hülfssebenen durch diesen Punkt. Zur kleinen Basis führe man die Tangenten cd und ce , welche die grosse in f, g, h, i schneiden. Alle Hülfssebenen, deren horizontale Tracen zwischen diesen Tangenten liegen wie z. B. cm , schneiden beide Kegel, und bestimmen gemeinschaftliche Punkte auf ihren Oberflächen; die Ebenen aber deren Tracen ausserhalb der zwei Tangenten liegen, können keine bestimmen. Hieraus folgt, dass der verlangte Durchschnitt aus zwei unterschiedenen Stücken besteht, von denen das eine auf dem, dem Bogen fmg entsprechenden Theile des grossen Kegels liegt, und das andere auf dem hi angehörigen. In der Zeichnung hat man sich nur mit dem ersten befasst.

Die Punkte a und b sind die Horizontalprojectionen der Scheitel, die Geraden ad und bf , ae und bg , diejenigen der Erzeugenden, darin die Kegel durch die Hülfs-ebenen geschnitten werden, welche cf und cg zu Tra-
cen haben (man vernachlässiget den Theil hi); folglich gehören die Punkte t und u zur Horizontalprojection der Durchschnittscurve der zwei Kegel. Ferner bemerke man, dafs diese Curve, welche auf dem grofsen Kegel von den, in bf und bg projecirten Erzeugenden begränzt wird, diese Geraden zu Tangenten haben mufs, und dafs folglich die Horizontalprojection selbst dieser Curve bf und bg zu Tangenten hat.

Denkt man sich nun eine beliebige Hülfssebene, etwa jene, deren Trace cm , die Basen in k , l , m schneidet, so bestimmt sie in den Kegeln die Erzeugenden, welche zu Horizontalprojectionen ak , al , bm haben; folglich werden die Durchschnitte n und o von bm mit ak und al , Punkte der Horizontalprojection der gesuchten Curve sein. Durch Wiederholung dieser Construc-tion erhält man diese Projection bis zu jeder beliebigen Genauigkeit.

Die andere Projection findet sich, indem man die Verticalprojectionen der durch die Hülfssebenen bestimm-ten Erzeugenden construirt. Zieht man also die Verti-calprojectionen $a'd'$ und $b'f'$, $a'e'$ und $b'g'$, so erhält man die den Punkten t und u entsprechenden Punkte t' und u' , und in welchen die Verticalprojection der Curve $b'f'$ und $b'g'$ zu Tangenten hat. Eben so werden durch die Projectionen $a'k'$, $a'l'$, $b'm'$ die Punkte n' und o' bekannt.

Die Tangente zur Curve ist leicht zu finden. Es sei $[p, p']$ der durch den Durchschnitt der in aq und br projecirten Erzeugenden, bestimmte Punkt; man ziehe zu den Basen die Tangenten qs und rs , so sind diese Tra-
cen der Berührungsebenen für die Kegel, im gedachten Punkte; hiermit verbinde man den Durchschnittspunkt s derselben mit dem Punkte p . Die Gerade sp mufs die Horizontalprojection der Tangente im Punkte $[p, p']$

sein; um deren Verticalprojection zu erhalten, fälle man das Perpendikel ss' auf xy , und verbinde s' und p .

Wendet man diese Constructionen auf die Punkte $[t, t']$ und $[u, u']$ an, so kommt man auf die Geraden $[bt, b't']$ und $[bu, b'u']$ zurück, wie dieß auch statt finden muß.

125. Aufgabe IX. Zwei Kegel sind gegeben, man soll erkennen, ob die Durchschnittscurve unendliche Aeste hat, und in diesem Falle, die Asymptoten bestimmen, sobald es deren giebt.

Man nehme das Gegebene wie in der Figur IX, in welcher $dmne$, $fhig$ die Basen der Kegel sind. Soll der Durchschnitt unendliche Aeste haben, so muß man, bei Führung der Hülfebenen durch die beiden Scheitel eine oder mehrere finden, welche den Kegel in parallelen Erzeugenden begegnen. Versetzt man folglich einen dieser Kegel, den kleinen z. B. dergestalt, daß dessen Erzeugenden parallel zu sich selbst bleiben, und sein Scheitel mit dem des großen zusammenfällt, so wird es dann dahin kommen, daß die zwei Kegel eine oder mehrere Erzeugende gemein haben. Damit es sich nun so verhalte, so müssen sich, was hinreicht, ihre horizontalen Tracen begegnen; sehen wir daher zu, was aus der Trace des kleineren Kegels nach seiner Versetzung wird.

Gesetzt man hätte die Tracen beliebig vieler Hülfebenen gezogen, so denke man sich, es sei durch die Verbindung der Durchschnittspunkte derselben mit der Basis des kleinen Kegels ein Polygon gebildet worden, und an Statt dieses Kegels eine Pyramide, welche dieses Polygon zur Basis, und den nämlichen Scheitel wie der Kegel hat. Vollzieht man die fragliche Ortsveränderung, so gelangen die in den Hülfebenen befindlichen Pyramidenkanten parallel zu sich selbst und ohne diese Ebenen zu verlassen, zum Scheitel des großen Kegels. Die Seitenflächen dieser Pyramide bleiben sich im

mer parallel, dergestalt, dafs sie auf der Horizontal-ebene ein Polygon bestimmen, dessen Seiten zwischen den Tracen der Hülfebenen eingeschlossen, und parallel zu den Seiten des ersten gerichtet sein werden. Hieraus folgt, dafs man leicht dieses Polygon construiren könne, sobald man nur einen seiner Eckpunkte kennt. Nun werde angenommen, d sei der Durchschnitt der Basis des kleinen Kegels mit der Trace cd einer Hülfebene; zieht man daher ad und hierauf $b\delta$ parallel zu ad , so bestimmt sich auf dieser Trace der Punkt δ , welcher ein Eckpunkt des neuen Polygons ist; man kann folglich dieses Polygon vollenden, und indem man diese Eckpunkte durch einen stätigen Zug verbindet, so erhält man die horizontale Trace des versetzten Kegels. Nur einen Theil dieser Trace hat man in der Curve $\delta k l e$ dargestellt.

Da diese Curve die Basis des grossen Kegels in den Punkten k und l schneidet, so schliesst man, dafs die gegebenen Kegel parallele Erzeugende haben, welche in den Hülfebenen enthalten sind deren Tracen ckm , cln sind; und jetzt kann man ihre Horizontalprojectionen bk und am , bl und an ziehen. In der Figur hat man nur die, den am und an entsprechenden Verticalprojectionen $a'm'$ und $a'n'$ gezogen.

Die Asymptoten ergeben sich, indem man nach der allgemeinen Methode die Tangenten für die, im Unendlichen auf der Durchschnittscurve beider Oberflächen liegenden Punkte sucht; d. h. man mufs den Durchschnitt der beziehentlich zu zwei Kegeln geführten Berührungsebenen nehmen, in den Erzeugenden deren Durchschnitt den Berührungspunkt bestimmt. Nun aber müssen die, in am und bk projecirten parallelen Erzeugenden, als für zwei im Unendlichen liegenden Punkte, bestimmend angesehen werden; zieht man folglich zu den Basen die zwei, sich in p schneidenden Tangenten mp , kp , hierauf pq parallel zu am , und $p'q'$ parallel zu $a'm'$, so werden diese Geraden pq und $p'q'$ die Projectionen einer er-

sten Asymptote sein. Zieht man ähnlich so die Tangenten nr , lr und hierauf die Linien rs und $r's'$ parallel zu an und $a'n'$, so erhält man die Projectionen der zweiten Asymptote.

Wenn bis hierher von der Construction des Durchschnitts der zwei Kegel noch nicht die Rede gewesen ist, so geschah diess darum, weil das zu befolgende Verfahren genau das nämliche wie in der vorigen Zeichnung ist. Um sich eine richtige Vorstellung von den verschiedenen Theilen, woraus dieser Durchschnitt besteht zu machen, muss man noch die Tangenten cdf und ceg zur kleinen Basis ziehen, und auf dem grossen Kegel die zwei Stücke der Oberfläche unterscheiden, welche den Bogen fog , hki entsprechen. Auf dem ersten muss man eine geschlossene Curve finden, jener der Fig. VIII ähnlich, und es mag diese hier vernachlässiget werden. Der andere dem Bogen hki entsprechende Theil, bestimmt durch seinen Durchschnitt mit dem kleinen Kegel zwei unendliche, von einander durch die zwei Asymptoten geschiedene Aeste. Der eine dieser Aeste ist auf dem Theile dieses Kegels enthalten, welcher den kleineren Bogen mn entspricht, und der andere auf dem, dem grösseren Bogen $mden$ zugehörigen. Dieser letztere Ast ist es allein, dessen Projectionen in der Zeichnung dargestellt worden sind.

126. Aufgabe X. Durchschnitt zweier Revolutionsoberflächen, deren Axen sich treffen.

Die Aufgabe ist leicht, sobald die Axen der zwei Oberflächen parallel sind; denn, dann kann man eine Folge von, zu diesen Axen perpendicularen Ebenen führen, und jede dieser Ebenen schneidet die Oberfläche in Kreisen, deren Durchschnittspunkte zur gesuchten Curve gehören. Dem ist nicht mehr so, sobald die Axen beliebige Richtungen haben, weil die zu einer derselben perpendicularen Ebenen, es keineswegs zur anderen sein werden. Indessen, wenn sich die Axen begegnen,

„n, „n,

„u, „u,

, „n, „n,

und dieß ist der vorliegende Fall, so kann man die Curvenpunkte noch durch Kreisdurchschnitte darstellen, indem sich die zwei gegebenen Oberflächen, zwar nicht in Ebenen, wohl aber in Kugeln schneiden, deren Mittelpunkte im Begegnungspunkte der zwei Axen liegen. Denn es ist klar, daß jede dieser Kugeln in den beiden Oberflächen Kreisumfänge bestimmen, und daß die denselben gemeinschaftlichen Punkte, zum Durchschnitt der zwei Oberflächen gehören.

Um die Constructionen möglichst einfach zu geben, werde festgesetzt, daß die Verticalebene parallel zur Ebene der zwei Axen sei, und die Horizontalebene perpendicular zu einer derselben. Auf diese Art, hat die eine Axe zur Horizontalprojection einen einzigen Punkt a (Fig. X.) und die andere eine, zu xy parallele ab ; die Verticalprojection der ersteren ist ein Perpendikel $a'a''$ zu xy , aber die der zweiten kann eine beliebige Lage haben, etwa so wie $a'b'$. Die zwei Oberflächen anlangend, so sehen wir die Verticalprojectionen $h'c'i'c''$ und $h'd'i'd''$ der in der Ebene der Axen enthaltenen Meridiane, als gegeben an.

Dieß vorausgesetzt, so beschreibe man aus dem Punkt a' einen beliebigen Kreis $c'd'c''d''$, welcher die Projectionen der zwei Meridiane in c' und c'' , d' und d'' schneidet; hierauf denke man sich eine Kugel vom nämlichen Halbmesser, welche ihren Mittelpunkt im Begegnungspunkt der zwei Axen hat. Diese Kugel wird durch die Ebene der Axen in einem Kreise geschnitten, welcher zur Verticalprojection den Kreis $c'd'c''d''$ hat; und die Punkte c' und c'' , d' und d'' sind die Verticalprojectionen der, diesen Meridianen und der Kugel gemeinschaftlichen Punkte. Indem man den Meridian der ersten gegebenen Oberfläche um seine Axe dreht, so ist es klar, daß die in c' und c'' projecirten Punkte einen horizontalen Kreis beschreiben werden, dessen Projection $c'c''$ ist, und welcher zugleich auf der Kugel und auf der ersteren Oberfläche liegt. Eben so ist

die Gerade $d'd''$ die Projection eines, der Kugel und der zweiten Oberfläche gemeinschaftlichen Kreises. Da der Durchschnittspunkt n' der Geraden $c'c''$ und $d'd''$, innerhalb des Kreises $c'd'c''d''$ liegt, so folgt, daß das durch diesen Punkt zur Verticalebene errichtete Perpendikel die Kugeloberfläche in zwei Punkten schneidet, welche den zwei fraglichen Kreisen angehören, und welche folglich Bestandtheil des Durchschnitts der zwei gegebenen Oberflächen ausmachen. Diese Punkte haben alle beide die nämliche Verticalprojection n' ; und um ihre Horizontalprojectionen n und n_1 zu erhalten, vollziehe man die Horizontalprojection der $c'c''$ entsprechenden Parallele und ziehe hierauf $n'n$ perpendicular zu xy . Indem man aus dem Mittelpunkte a' andere Kreise in der Verticalebene zieht, und für jeden derselben die nämlichen Constructionen wiederholt wie für $c'd'c''d''$, so erhält man so viel Punkte des gesuchten Durchschnitts als man will.

Werden Punkte einer gegebenen Parallele verlangt, z. B. der in $e'e''$ projecirten, so muß man aus dem Punkte a' den durch e' und e'' gehenden Kreis beschreiben, und hiermit die so eben erklärten Constructionen ausüben. Man erhält so die Grenzen o und o' der Horizontalprojection.

Da die auf der Verticalebene in $h'e'i'$ und $h'd'i'$ projecirten Meridiane in der nämlichen Ebene liegen, so folgt, daß die Punkte h' und i' zur Verticalprojection des Durchschnitts der zwei Oberflächen gehören müssen. Die entsprechenden Horizontalprojectionen h und i befinden sich auf der Linie ab .

Bis jetzt wurde die Tangente eines, auf dem Durchschnitte zweier krummen Oberflächen gegebenen Punktes mittelst zweier Berührungsebenen bestimmt; man hat aber Nr. 114, bemerkt, daß sie es auch ist, vermöge der Bedingung, wornach sie perpendicular zur Ebene der, durch den gegebenen Punkt, zu jeder der zwei Oberflächen gezogenen Normalen sei, und daß man vorzüglich bei Revolutionsoberflächen von dieser Methode Gebrauch

machte, wegen der Leichtigkeit mit welcher sich die Normalen in dieser Gattung von Oberflächen darstellen lassen. Denn, da die Berührungsebene perpendicular zur Meridianebene des Berührungspunktes ist, so muß die Normale in dieser letzteren liegen, und es jetzt leicht sein, sie zu erkennen.

Gesetzt, es handele sich darum, die Tangente für den, auf den zwei, in $c'c''$ und $d'd''$ projecirten Kreisen, liegenden Punkte $[n, n']$ zu finden, so suche man zuvörderst die zwei Normalen. Zu diesem Behuf beachte man, daß die, zu einer Revolutionsoberfläche, durch verschiedene Punkte einer Parallele geführten Normalen sämmtlich die Axe der Oberfläche im nämlichen Punkte treffen. Legt man folglich zu den Verticalprojectionen der zwei gegebenen Meridiane die Normalen $c''k'$ und $d''l'$, welche die Projectionen der Achse in k' und l' schneiden, und zieht $n'k'$ und $n'l'$, so erhält man die Verticalprojectionen der zwei gesuchten Normalen. a und l sind die, den Punkten k' und l' entsprechenden Horizontalprojectionen; so daß man die Horizontalprojectionen der zwei Normalen bekommt, indem man na und nl zieht. Nun muß man die Tracen der, diese Normalen enthaltenden Ebene construiren, und hierauf durch die Punkte n und n' Perpendikel zu diesen Tracen ziehen.

Es ist unnöthig, die verticale Trace zu suchen; denn da die Ebene der Axen parallel zur Verticalebene läuft, so ist diese Trace der Geraden $k'l'$ parallel. Anstatt der horizontalen Trace kann man die Gerade nehmen, welche die Punkte verbindet, wo die Normalen irgend eine horizontale Ebene treffen; und um die Constructionen in einem kleineren Raume zusammenzudrängen, bedient man sich derjenigen, deren verticale Trace $e'e''$ ist. Daher verlängere man $n'k'$ und $n'l'$ bis zu ihren Durchschnitten r' und s' mit $e'e''$, bestimme die entsprechenden Punkte r und s auf den Horizontalprojectionen na und ln der zwei Normalen, und vereinige hierauf die Punkte r und s .

Nachdem man auf diese Art die Geraden rs und $k'l'$ gefunden hat, zu welchen die Tracen der Ebene der Normalen parallel sind, so fälle man auf die Geraden die Perpendikel nt und $n't'$; dieselben müssen die Projectionen der verlangten Tangente sein.

Im Allgemeinen ist die Projection der Tangente einer Curve berührend zur Projection dieser Curve. Indessen giebt es eine Ausnahme von dieser Regel, sobald die Tangente perpendikulär zur Projectionsebene ist; denn dann reducirt sich, wie dieß schon in Nr. 116 angeführt wurde, ihre Projection auf einen Punkt, und die Tangente zur Projection der Curve ist unbestimmt. Dieß findet bei den in h' und i' projecirten Punkten statt, wo die Berührungsebenen beider Oberflächen, augenscheinlich perpendikulär zur Verticalebene sind. Hieraus folgt, daß, hätte man die Tangente vermittelt des Durchschnitts der Berührungsebenen bestimmt, die Tangenten für die Punkte h' und i' der Projection $h'n'i'$ nicht gefunden werden könnten. Dieses Hinderniß findet nicht Statt, so bald man sich, wie es vorhin geschah, der Normalen bedient.

127. Aufgabe XI. Durchschnitt zweier Revolutionsoberflächen, deren Axen in verschiedenen Ebenen liegen.

Man nehme noch (Fig. XI) die Horizontalebene perpendikulär zur Axe der ersten Oberfläche, und die Verticalebene beiden Axen parallel. Das Gegebene habe dieselbe Anordnung wie in der vorigen Zeichnung, mit dem einzigen Unterschiede, daß die Horizontalprojection der Axe der zweiten Oberfläche nicht mehr durch den Punkt a geht, und eine solche Lage wie bc , parallel zu xy erhält.

Da die Axen in verschiedenen Ebenen liegen, so ist es nicht mehr möglich auf beiden Oberflächen Parallelen zu finden, welche in der nämlichen Ebene, oder auf derselben Kugel enthalten wären; und dann ist es, zur Auffindung von Punkten des gesuchten Durchschnitts, das Beste, beide Oberflächen durch horizontale Ebenen zu

schneiden. Jede derselben schneidet die erstere Oberfläche in einem Kreise dessen Horizontalprojection ein gleicher, leicht zu findender Kreis ist; in der zweiten aber bestimmt sie eine Curve deren Horizontalprojection man durch Punkte ermitteln muß. Ist diese Projection gezeichnet, so gehören deren Begegnungspunkte mit dem Kreise der Horizontalprojection des Durchschnitts beider Oberflächen an; und hierauf kann man leicht die entsprechenden Verticalprojectionen bestimmen, indem man bemerkt, daß sie sich auf der verticalen Trace der Hülfebene befinden müssen, durch welche beide Oberflächen geschnitten wurden. Man sieht, daß jede Hülfebene zur Construction einer Curve Anlaß giebt, deren einziger Nutzen, die Bestimmung, einer gewissen Anzahl von Punkten des gesuchten Durchschnitts ist.

Es sei $d'f''$, parallel zu xy , die verticale Trace einer dieser Ebenen. Ihr Durchschnitt mit der ersten Oberfläche projicire sich vertical auf der Geraden $d'd''$, und horizontal auf den, mit dem aus dem Mittelpunkte a mit einem, der Hälfte von $d'd''$ gleichen Halbmesser, beschriebenen Kreisumfange dmm_1 . Ihr Durchschnitt mit der zweiten Oberfläche ist eine, die Gerade $f'f''$ zur Verticalprojection habende Curve, deren Horizontalprojection zuvor construirt werden muß. Zu diesem Zwecke, denke man sich eine Folge, zur Axe dieser Oberfläche perpendicularer Ebenen, welche dieselbe in Kreisumfängen schneiden.

Gesetzt, $g'g''$ sei die Verticalprojection eines solchen Umfangs. Der Durchschnittspunkt h' von $f'f''$ mit $g'g''$ ist die Verticalprojection zweier Punkte der Hülfscurve, welche kennen gelernt werden soll, und folglich müssen die Horizontalprojectionen dieser beiden Punkte sich auf dem Perpendikel $h'h$ zu xy befinden. Man drehe die Ebene des Kreisumfanges um die in h' projecirte Gerade, damit derselbe horizontal werde, und projicire ihn dann auf die Horizontalebene. Durch aufmerksames Beobachten dieser Constructionen findet man, daß diese Projection der aus dem Punkte k als eines Mittelpunktes, mit

dem Halbmesser kl construirte Kreis ist. Nun aber wurde bereits erwähnt, daß die in h' projecirten Punkte sich nicht verändern; folglich müssen sich ihre Horizontalprojectionen in den Durchschnitten h und h_r , der Linie $h'h$ mit dem Kreisumfange kl befinden.

Indem man andere perpendikuläre Ebenen zu $b'c'$ führt, bestimmt man andere Punkte des, der $f'f''$ entsprechenden Schnittes, in der zweiten Oberfläche; und gelangt auf diese Weise zur Curve hfh_r . Diese Curve und der Kreisumfang dmm_r , sind folglich die Horizontalprojectionen der, in beiden Oberflächen durch ein und dieselbe Hülfebene vollzogenen Schnitte; und hieraus schließt man, daß die Durchschnittspunkte m und m_r dieser zwei Linien zur Horizontalprojection des Durchschnitts der zwei Oberflächen gehören. Durch diese Punkte sind die Verticalprojectionen m' und m'_r als gegeben anzusehen.

Nun muß man die beiden Oberflächen durch andere horizontale Ebenen schneiden; und indem man für jede derselben alle so eben erklärten Constructionen wiederholt, so erhält man beliebig viele Punkte der Projectionen des Durchschnitts der zwei Oberflächen. Auf diese Art hat man die zwei Curven $mnum_r$, $m'n'u'm'_r$ dargestellt.

Es kann erforderlich sein, die Punkte des Durchschnitts besonders zu kennen, welche sich auf den zur Verticalebene parallelen Meridianen befinden. Gesetzt, man wollte die, auf dem Meridian der ersten Oberfläche gelegenen haben. Sucht man die Curve in welcher die, auf ad errichtete verticale Ebene die zweite Oberfläche schneidet, so sind die, dieser Curve und dem fraglichen Meridiane gemeinschaftlichen Punkte die verlangten. Die Bestimmung dieser Curve anlangend, so kann sie keinerlei Schwierigkeit darbieten, und das in der Figur Angezeigte wird dem Leser genügen.

Die Tangente zum Durchschnitt der zwei Oberflächen ergiebt sich hier noch mittelst der Normalen, wie in der Aufgabe X. Angenommen, $[n, n']$ sei der Berührungs-

punkt; zuvörderst ziehe man die Verticalprojectionen der Parallelen jeder Oberfläche, auf welchen dieser Punkt liegt, und hierauf diejenigen der Normalen. Anstatt die Tracen der Ebene der Normalen auf den Projectionsebenen zu suchen, was unbequem gewesen wär, bestimmte man die Durchschnitte dieser Ebene mit der durch den Punkt $[o, o']$ gehenden horizontalen und verticalen Ebene, wo die Normale der zweiten Oberfläche die Axe derselben trifft. Sind die Projectionen or und $o'r'$, os und $o's'$ dieser zwei Durchschnitte bekannt, so ziehe man nt , $n't'$ beziehentlich perpendicular zu or , $o's'$; diese Perpendikel sind die Projectionen der Tangente.

Schraubenlinie und sphärische Epicycloide.

128. Aufgabe XII. Die Projection einer, auf einem verticalen Cylinder gezogenen Schraubenlinie darzustellen, und die einer gegebenen Ebene parallelen Tangenten zur Schraubenlinie zu bestimmen.

Irgend ein Cylinder sei gegeben, man denkt sich denselben mit einer Basis, welche durch den Schnitt einer, zu den Erzeugenden perpendicularen Ebene entsteht. Trägt man von dieser Ebene ausgehend, auf die Erzeugenden proportionale Längen zu den Bogen der Basis, welche zwischen diesen Erzeugenden und einem, auf dieser Basis festgesetzten Anfangspunkte liegen, so ist die auf diese Weise auf dem Cylinder bestimmte Curve eine Schraubenlinie.

Diese Entstehung zeigt dafs, wenn man den Cylinder auf einer Ebene entwickelt, die Basis eine zu den Erzeugenden perpendicularen Gerade wird, und daher die Schraubenlinie eine zu den Erzeugenden schiefe Gerade. Mithin bilden alle Tangenten zur Schraubenlinie den nämlichen Winkel mit den Erzeugenden; folglich mufs sich diese Curve, sobald man die Entwicklung in einer, an den Cylinder durch einen Punkt der Schraubenlinie, ge-

föhrten Beröhrungsebene bewerkstelliget, auch in ihrer Tangente entwickeln.

Eine andere, sich sofort ergebende Eigenschaft besteht darin, dafs, indem man alle Tangenten der Schraubenlinie parallel zu sich selbst, an einen beliebigen Punkt überträgt, dieselben einen geraden Kegel bilden, dessen Axe den Erzeugenden des Cylinders parallel ist. Hieraus folgt, dafs die einer gegebenen Ebene parallelen Tangenten, den Geraden parallel sein müssen, welche man erhält, indem man diesen Kegel durch eine, der gegebenen Ebene parallele Ebene schneidet; diese Bemerkung genügt, um diese Tangenten zu bestimmen.

Nach gehöriger Auffassung des Vorangegangenen wird die vorliegende Aufgabe keinerlei Schwierigkeit darbieten.

Projection der Schraubenlinie. Gesetzt, es sei die Basis des Cylinders ein, in der Horizontalebene gezogener Kreis *abc* (Fig. XII), so wie der Anfang der Bogen oder kreisförmigen Abscissen im Punkte *a*, und die Höhe der Schraubenlinie, d. h. der auf den Erzeugenden zwischen zwei aufeinander folgenden Windungen oder Revolutionen eingeschlossene Abschnitt, sei gleich *a'a''*. Man theile den Kreisumfang *abca* und die Höhe *a'a''* in die nämliche Anzahl z. B. in sechszehn gleiche Theile; föhre die Verticalprojectionen, der durch die Theilpunkte des Kreisumfanges gehenden Erzeugenden aus, und begränze die Projectionen vermittelt in der Verticalebene, durch die entsprechenden Theilpunkte auf *a'a''* gelegten Horizontalen. Die Curve *a'b'c'a''*, welche alle so bestimmten Punkte vereiniget, ist die Verticalprojection der ersten Windung. Leicht übersieht man, wie die folgenden Windungen erhalten werden.

Tangenten. Es erübriget, die Tangenten zur Schraubenlinie zu suchen, welche einer gegebenen Ebene $\alpha\beta\alpha'$ parallel sind, deren horizontale Trace perpendicular zu *xy* angenommen werden mag. Für jede andere Lage, würde die Lösung keineswegs schwieriger sein. An den Kreis *abc* ziehe man die, dem rectificirten Bogen *ab* glei-

che Tangente bd . Die in bd errichtete Verticalebene berührt den, die Schraubenlinie enthaltenden Cylinder, und entwickelt man ihn, auf dieser Ebene, so leuchtet ein, daß sich die Schraubenlinie auf einer Geraden entwickelt, welche durch den Punkt d geht und berührend zum Punkte $[b, b']$ der Schraubenlinie ist. Projicirt man folglich den Punkt d nach d' auf xy , und zieht die Verbindende $b'd'$, so werden bd und $b'd'$ die Projectionen dieser Tangente sein.

Eine zu dieser Tangente durch den Punkt $[o, b']$ gezogene Parallele trifft die Horizontalebene in e ; und dreht man dieselbe um die Axe des Cylinders, so erzeugt sie einen Kegel, dessen Basis der, mit dem Halbmesser oe beschriebene Kreis ist, und dessen Erzeugenden den Tangenten der Schraubenlinie parallel sind. Folglich muß die, durch den Scheitel dieses Kegels gehende, und der gegebenen Ebene $\alpha'\beta\alpha$ parallele Ebene $b'f'h$, diesen Kegel in zweien, den verlangten Tangenten parallelen Geraden schneiden. Diese Geraden sind in og , oh horizontal projicirt.

Da die Tangenten zur Schraubenlinie ihre Horizontalprojectionen berührend zum Kreis abc haben, so folgt, daß indem man die Tangenten mr und ns beziehentlich parallel zu og und oh zieht, dadurch die Horizontalprojectionen der gesuchten Tangenten erhalten werden. Da die Projectionslinien mm' und nn' die Verticalprojectionen m' und n' der Berührungspunkte bestimmen, so erhält man durch das Ziehen der Parallelen $m'r'$ und $n's'$ zu $\beta\alpha'$, die Verticalprojectionen der Tangenten.

Bemerkungen. Man kann zum Kreis abc eine andere zu og parallele Tangente ziehen; es ist jedoch leicht einzusehen, daß die ihr auf der Schraubenlinie entsprechende Tangente, in Bezug auf die Horizontalebene, eine, der in og projecirten Erzeugenden des Kegels, entgegengesetzte Neigung hat, und daß sie folglich keineswegs parallel zu ihr ist. Aus demselben Grunde muß man auch die andere zu oh parallele Tangente verwerfen.

Beim Errichten der Projectionslinien mm' , nn' versteht es sich von selbst, daß man nur ihre Durchschnitte mit den Theilen der Curve nehmen muß, welche dem Vordertheile des Cylinders entsprechen. Es leuchtet aber auch ein, daß man ihre Durchschnitte mit jeder Windung nehmen muß, und daß man so neue Tangenten erhält, solche wie $m''r''$, welche der Aufgabe noch entsprechen.

129. Aufgabe XIII. Die Projection einer sphärischen Epicycloide darzustellen und die Tangente für irgend einen Punkt dieser Curve zu bestimmen.

Wird ein Kreis auf einem anderen fest bleibenden gerollt, dergestalt, daß ihre Umfänge sich stets berühren, so beschreibt jeder Punkt des beweglichen Umfanges eine Curve, welche Epicycloide heißt. Die Epicycloide ist eben, sobald alle ihre Punkte in der nämlichen Ebene liegen, und es findet dieß Statt, wenn der bewegliche Kreis in der Ebene des festen bleibt. Sie ist sphärisch, sobald alle ihre Punkte auf einer und derselben Kugel liegen; was sich ereignet, wenn die zwei Kreise die Basen zweier geraden Kegel sind, welche einen gemeinschaftlichen Scheitel und eine gemeinschaftliche Seite haben, und wenn man einen dieser Kegel auf dem anderen rollt, so daß jener stets den nämlichen Scheitel wie dieser hat, und ihn in einer seiner Seiten berührt, die sich jeden Augenblick ändert.

In diesem Falle liegt der feste Kreis auf einer, aus dem gemeinschaftlichen Scheitel, als Mittelpunkt, mit einem der gemeinschaftlichen Seite, gleichem Halbmesser beschriebenen Kugel, und der bewegliche Kreis bleibt stets auf dieser Kugel. Es ist auch klar, daß die Ebene dieses beweglichen Kreises die Ebene der festen Basis stets in einer, beiden Kreisen gemeinschaftlichen Tangente schneidet, und daß die Neigung der zwei Ebenen constant, und dem durch die beiden Kegeln gebildeten Winkel gleich bleibt.

Die Tangente an einem Punkt der sphärischen Epicycloide muß in der Berührungsebene zu der besprochenen Kugel liegen. Um die Bestimmung dieser Tangente zu vollbringen, wird bewiesen werden, daß sie auch in der Berührungsebene einer Kugel liegt, welche zum Mittelpunkt den Punkt haben würde, wo der in seiner wirklichen Lage gedachte bewegliche Kreis, den festen Kreis berührt.

An Statt zweier Kreise, denke man sich zwei Polygone $ABC \dots\dots$, $A'B'C' \dots\dots$, über einander rollend (sie sind in der Figur nicht angegeben); aber größerer Einfachheit wegen, setze man, daß alle Seiten der zwei Polygone unter sich gleich sind. Ueberdies kann man diese Seiten von beliebiger Anzahl und Neigung nehmen. Diefes voraus gesetzt, so denke man sich, der Eckpunkt A' falle mit A zusammen, und das Polygon $ABC \dots\dots$ sei fest, $A'B'C' \dots\dots$ werde um den Punkt A gedreht, dergestalt, daß B' auf B zu liegen kommt. Dann drehe man $A'B'C' \dots\dots$ um B , so daß C' auf C kommt, und so weiter fort. Man untersuche die Natur der Linie, welche irgend ein Punkt des beweglichen Polygons beschreibt. Nun aber ist es klar, daß während der, um den Eckpunkt A Statt findenden Drehung, der Punkt M auf einer, aus dem Punkte A als Mittelpunkt, mit dem Halbmesser AM beschriebenen Kugel bleibt; während der Drehung um den Eckpunkt B , bleibt er auf einer, aus dem Punkt B als Mittelpunkt mit dem Halbmesser BM beschriebenen Kugel; und so fort. Folglich muß die Tangente in einem beliebigen Punkte der durch den Punkt M erzeugten Linie in der Berührungsebene zu einer Kugel enthalten sein, deren Mittelpunkt im Eckpunkt liegt, um welchen die Drehung geschah, die den Punkt M in seine gegenwärtige Lage gebracht hat. Da dieser Schluss von der Größe der Seiten der Polygone unabhängig ist, so muß er gleichfalls für zwei Curven, davon die eine auf der anderen rollt, gelten; d. h. bezeichnet man, in welcher ihrer Lagen die bewegliche Curve sein mag, durch H ihren

Berührungspunkt mit der festen, und durch N die entsprechende Lage des beschreibenden Punktes M , so muß die Tangente im Punkte N , der durch den Punkt M erzeugten Curve, stets in der Berührungsebene zum Punkte N , der aus dem Mittelpunkte H mit dem Halbmesser HN beschriebenen Kugel enthalten sein.

Kommen wir nun zum Einzelnen, der in der Aufgabe verlangten Constructionen.

Projection der Epicycloide. Es soll diese Projection auf der Ebene der Basis des festen Kegels vorgenommen werden. Gesetzt, es sei diese Basis der, in der Horizontalebene mit dem Halbmesser oa beschriebene Kreis abb_1a_1 , der erzeugende Punkt der Epicycloide wäre ursprünglich in a gewesen, und der Berührungspunkt beider Kreise gegenwärtig in b ; man suche, welches die entsprechende Lage des erzeugenden Punktes ist. Als zweite Projectionsebene werde die, auf ob errichtete verticale Ebene gewählt. Sie muß den, beiden Kegeln gemeinschaftlichen Scheitel o' enthalten, und den beweglichen Kegel in einem gleichschenkligen Dreiecke $o'bc'$ schneiden, welches einen Theil des in der Aufgabe Gegebenen ausmacht. Die Basis dieses Kegels liegt in der Ebene, welche zur horizontalen Trace die Tangente bc , und zur verticalen die Linie bc' hat, die auch als Verticalprojection dieser Basis angesehen werden kann. Man nehme die Umklappung bMC dieser Basis auf die Horizontalebene vor. Um in dieser Umklappung die Lage des erzeugenden Punktes M zu erhalten, muß man den Bogen bM dem Bogen ba gleich machen; denn da der Punkt M ursprünglich in a war, und die verschiedenen Elemente der zwei Bogen bM und ba successiv auf einander zu liegen kamen, so müssen diese zwei Bogen gleich sein.

Bekannt mit der Umklappung M des erzeugenden Punktes, so ist es leicht, dessen Verticalprojection m' zu erhalten, und hierauf seine Horizontalprojection m . Bringt man den Berührungspunkt beider Kreise in jeden anderen Punkt b_1 , so denke man sich eine verticale Ebene

durch den Halbmesser ob_1 , und es werden den vorigen ähnliche Constructionen einen neuen Punkt n der Horizontalprojection der Epicycloide bestimmen. Auf diese Weise fortfahrend, findet man mit jeder beliebigen Genauigkeit die Curve $amna_1$.

Zur Vereinfachung kann man alle, in b_1 vorzunehmenden Constructionen im Punkte b ausführen, d. h. man wird den Bogen $bM_1 = b_1a$ nehmen, und die Horizontalprojection m_1 eben so, wie den Punkt m finden. Dann aber, muß man den Punkt m_1 in seine wahre Lage zurückführen, was dadurch geschieht, indem man den Punkt n in der nämlichen Lage in Bezug auf ob_1 , wie den Punkt m_1 in Bezug zu ob , nimmt. Nun aber genügt es hierzu, aus dem Mittelpunkte o den Umkreis m_1de zu beschreiben, und den Bogen $en = dm_1$ zu nehmen. Dadurch ist ersichtlich, daß man alle Punkte der Projection $amna_1$ erhalten kann, indem man sich stets der nämlichen Ebene bedient.

Construction der Tangente. Die oben besprochene Epicycloide, liegt auf einer Kugel, welche zum Mittelpunkt den Scheitel o' , und zum Halbmesser die Seite $o'b$ hat; folglich befindet sich die Tangente zum Punkte $[m, m']$ dieser Curve in der Berührungsebene zu dieser Kugel. Man sah auch, daß sie in der Berührungsebene zu der Kugel liegen muß, dessen Mittelpunkt b , und Halbmesser gleich bM wär; folglich ist sie der Durchschnitt beider Berührungsebenen.

Der in bMC umgeklappte Kreis gehört zur ersteren Kugel; zieht man folglich zu diesem Kreis die Tangente Mf , so wird sie die Umklappung einer, in der Berührungsebene zu dieser Kugel liegenden Geraden sein, und folglich liegt der Begegnungspunkt von Mf mit bc auf der horizontalen Trace dieser Ebene. Folglich ist diese Trace das, aus dem Punkte f , auf die Projection om des, durch den Berührungspunkt gehenden Halbmessers, gefällte Perpendickel αf .

Der mit dem Halbmesser bM beschriebene Kreis ist die Umklappung eines Kreises der zweiten Kugel; zieht man folglich zu ihm die Tangente Mg , welche bc in g trifft, und fällt $g\beta$ perpendicular zu bm , so wird die Linie $g\beta$ die horizontale Trace der Berührungsebene für die zweite Kugel sein.

Da sich die Tracen αf und βg im Punkte r schneiden, welcher zum Durchschnitt beider Berührungsebenen gehören muß, so wird man die Gerade mr ziehen, und diese die Horizontalprojection der Tangente zur Epicycloide sein, oder was dasselbe ist, die Tangente zur Projection amn dieser Curve.

Durch das Construire der verticalen Tracen beider Berührungsebenen erhält man Bestätigungen. Es leuchtet ein, daß die, der ersteren das, auf die Projection $o'm'$ des Halbmessers der ersten Kugel, gezogene Perpendikel αf ist; und man wird beweisen, daß die, der anderen Ebene das auf bc' errichtete Perpendikel $c'\beta'$ ist. Denn die zur Sehne bM'' perpendicular Tangente Mg muß durch den Punkt C geh'n, und folglich, indem man den Kreis bMC in seine wahre Lage zurückführt, diese Tangente die Verticalebene in c' treffen; überdiess fällt die Verticalprojection des Halbmessers bM auf $b'c'$; und hieraus ergibt sich, daß die verticale Trace der Berührungsebene an die zweite Kugel das, auf bc' errichtete Perpendikel $c'\beta'$ ist. Diese Trace muß folglich xy im nämlichen Punkte treffen wie die horizontale Trace βg , was schon eine Bestätigung darbietet. Da ferner die verticalen Tracen $\alpha f'$, $\beta'c'$ beider Berührungsebenen sich in s' schneiden, so muß die Gerade $m's'$ die Verticalprojection der Tangente zur Epicycloide sein; sucht man folglich mittelst der Projectionen mr und $m's'$, in welchen Punkten diese Tangente die zwei Projectionsebenen durchdringt, so muß man die Punkte r und s' wieder finden, was neue Bestätigungen giebt.

Damit die Zeichnung nichts zu wünschen übrig läßt, so hat man daselbst auch die Tangente mittelst der Nor-

mialen dargestellt. Diese Linien sind hier keine anderen, als die Halbmesser der zwei Kugeln, und es ist klar, daß die verticale Trace ihrer Ebene sich mit der Seite $o'b$ deckt. Die horizontale Trace dieser Ebene anlangend, so geht sie schon durch den Punkt b ; und man erhält einen zweiten, indem man durch den Berührungspunkt, und parallel zur Trace bo' eine Gerade $[mi, m'i']$ zieht, und deren Durchschnitt i mit der Horizontalebene bestimmt. Es wird also die Gerade bi die horizontale Trace der Ebene der zwei Halbmesser sein, und die Projectionen der Tangente zur Epicycloide müssen beziehentlich perpendicular zu den Tracen bi und bo' sich befinden.

130. Bemerkung. Wir haben so eben gesehen, daß die Trace $\beta'c'$ der Berührungsebene zur Kugel vom Halbmesser bM , perpendicular im Endpunkte der Geraden bc' ist; hieraus ergiebt sich eine sogleich darzulegende, wichtige Folgerung. Man verlängere $\beta'c'$ bis zu seinem Durchschnitt o'' mit der Axe oo' , und denke sich einen Kegel, welcher seinen Scheitel in diesem Punkte, und die sphärische Epicycloide zur Basis habe. Wollte man die Berührungsebene zu diesen epicycloidischen Kegel, für die durch den Punkt $[m, m']$ gehende Erzeugende haben, so bemerke man zuvörderst, daß sie diese Erzeugende enthalten und folglich durch den Punkt o'' gehen muß. Auch beachte man, daß sie die Tangente zur Epicycloide für diesen Punkt $[m, m']$ enthalten muß; nun aber liegt diese Tangente in der Berührungsebene zur Kugel des Halbmessers bM , und darum befindet sich der Punkt s' , wo jene Tangente die Vertical Ebene trifft auf der Trace $\beta'c'$; folglich geht die Berührungsebene an den epicycloidischen Kegel durch die Gerade $o''c'$.

Man denke sich den epicycloidischen Kegel als unveränderlich mit dem Kegel $o'abb$, verbunden, und mit ihm einen Körper bildend; drehe ferner das System dieser zwei Kegel um die Axe oo'' im Sinne des Pfeiles uv ,

und setze, der Punkt b_1 werde den Platz des Punktes b einnehmen. Durch diese Bewegung verläßt der Punkt $[m, m']$ die, als fest angenommene Ebene cbc' ; ein anderer Punkt der Epicycloide aber wird an dessen Stelle kommen, und es leuchtet ein, daß dieser genau der in M_1 umgeklappte und in m_1 und m'_1 projecirte ist. Wollte man die Lage haben, welche die Berührungsebene zum epicycloidischen Kegel in der Erzeugenden einnehmen wird, auf welcher dieser Punkt liegt, so sieht man ein, daß sie noch durch die Gerade $o''c'$ gehen muß. Das nämliche findet mit allen auf einander folgenden Berührungsebenen zum epicycloidischen Kegel Statt, je nach dem die Punkte der Epicycloide in die Ebene cbc' gelangen. Daher sind diese auf einander folgenden Berührungsebenen nichts Anderes, als die verschiedenen Lagen einer, um die feste Gerade $o''c'$ beweglichen Geraden, welche durch den epicycloidischen Kegel fortgeschoben wird.

Folglich ist es, wenn man diese bewegliche Ebene mit einem unveränderlichen, in der Ebene cbc' auf dem Durchmesser $bc' = 2bc$ beschriebenen Kreise verknüpft klar, daß die Bewegung dieser beweglichen Ebene diesen Kreis zwingt, um die Axe $o''c'$ im entgegengesetzten Sinne zur Bewegung des Kreises abb_1 sich zu drehen, und daß diese Drehung dergestalt erfolgt, daß die Punkte der zwei Kreisumfänge, gleichzeitig, Bogen beschreiben, welche nach ihrer Rectification gleiche Länge haben können. Diese Eigenschaft ist es welche wir darlegen wollten, und worauf die Theorie der, Winkelräder genannten Eingriffen beruht.

Vierte Abtheilung.

Uebungen.

Gegenstand dieser Uebungen.

131. Alle bisher gelösten Aufgaben zerfallen in zwei sehr unterschiedene Gruppen. In der einen wird eine Folge von auszuführenden Constructionen dargelegt, und dieselbe fordert daher eine umfassende und gründliche Kenntniss der Linien und Oberflächen, in der andern vollzieht man die Constructionen wirklich, und der Leser wird erkannt haben, dass sie sich immer darauf beschränkt, eine geringe Anzahl Verfahrensarten anzuwenden, die beständig dieselben, aber mannigfaltig verbunden sind. Diese Verfahrensarten sind es, aus welchen eigentlich die descriptive Geometrie besteht; und da sie durch Ordnung und Wahl der im Vorangehenden entwickelten Beispiele, hauptsächlich hervorgehoben worden sind, so ist nunmehr dieses Lehrbuch als vollständig zu betrachten. Auch hat dieser vierte Theil keinen andern Zweck als, wie die Ueberschrift besagt, nur einige Uebungen dem Leser zu bieten, welcher mit den Constructionen und der Zeichnung der Figuren noch nicht genug vertraut ist.

Einige Aufgaben über die Gerade und Ebene.

Umschriebene und eingeschriebene Kugel.

132. Aufgabe I. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu führen, welche mit den Projectionsebenen gegebene Winkel bildet.

Es werden die gegebenen Winkel durch α und β bezeichnet, und man erinnert daran, daß diese Nichts anderes sind als die, durch die gesuchte Gerade mit ihren beiden Projectionen gebildeten Winkel. Hiernach nehme man beliebig den Punkt $[a, a']$ auf der Verticalebene (Aufgaben der vierten Abtheilung Fig. I.), und setze für einen Augenblick die verlangte Gerade ginge durch diesen Punkt. Sie bildet mit ihrer Horizontalprojection und mit aa' ein leicht auf die Verticalebene, in wahrer Gröfse umzuklappendes, rechtwinkliges Dreieck, denn es genügt hierzu den Winkel $a'Ba = \alpha$ zu machen.

Die Entfernung $a'B$ gleicht der wahren Länge der Hypothenuse dieses Dreiecks, und im Raume bildet diese nämliche Gerade mit ihrer Verticalprojection ein anderes rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypothenuse sie noch ist, und dessen am Scheitel anliegender spitzer Winkel dem Winkel β gleichkommt; folglich fällt es nun nicht schwer das, dem anderen gleiche Dreieck $Ba'B$ zu construiren. Beschreibt man den Bogen $B'b$ aus dem Mittelpunkte a' und zieht $a'b'$, so ergiebt sich die Verticalprojection der gesuchten Geraden; errichtet man ferner $b'b'$ perpendicular zu xy , beschreibt den Bogen Bb mit dem Halbmesser aB und zieht die Verbindende ab , so ist dieß die Horizontalprojection dieser Geraden. Man bemerke daß bb' gleich BB' sein muß.

Bis jetzt wurde angenommen, der gegebene Punkt $[a, a']$ sei auf der Verticalebene gelegen; giebt man ihm irgend eine Lage $[m, m']$, so genügt es zur Lösung der Aufgabe, die Geraden mn und $m'n'$ beziehentlich parallel zu ab und $a'b'$ zu ziehen.

Da das Dreieck aBa' eben so wohl zur Rechten als zur Linken der Linie aa' construirt werden kann, so ist die Aufgabe zweier Lösungen fähig.

133. Aufgabe II. Eine Ebene zu bestimmen, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und mit den Projectionsebenen gegebene Winkel einschließt.

α und β mögen die Winkel der gesuchten Ebene,

mit beiden Projectionsebenen bedeuten. Man nehme auf der Horizontalebene den Punkt a (Fig. II) willkürlich, und setze einstweilen, die Ebene aob bilde mit den Projectionsebenen die Winkel α und β . Zieht man ac perpendicular zu xy , und cd perpendicular zu ab , so bildet die im Raume die Punkte a und d verbindende Gerade mit cd den bekannten Winkel β . Hieraus schließt man leicht, daß wenn der Winkel $aec = \beta$ gemacht wird, $ce = cd$ sich ergibt; folglich ist die Trace ob berührend zu dem mit dem Halbmesser ce beschriebenen Bogen ei .

Errichtet man cb perpendicular zu xy , und denkt sich vom Punkte c ein Perpendikel auf die Ebene aob gefällt, so enthalten im Raume diese zwei Perpendikel einen, α gleichen Winkel zwischen sich. Da das zweite in der Ebene acd liegt, so genügt es folglich, um dasselbe in wahrer Gröfse zu erhalten, cf perpendicular auf ae zu ziehen. Dann leuchtet ein daß, wird der Winkel $fcg = \alpha$ gemacht, man $cg = cb$ erhalten muß. Der Punkt b ist daher als bestimmt anzusehen; folglich wird die Trace bo auch bekannt sein, da sie den Bogen ei berühren muß, und endlich auch die Trace ao .

Nun kennt man eine Ebene, welche mit den Projectionsebenen die gegebenen Winkel α und β bildet. Um eine solche zu erhalten, welche die nämlichen Bedingungen erfüllt und außerdem durch einen gegebenen Punkt $[m, m']$ geht, reicht es hin, durch diesen Punkt eine parallele Ebene zu aob zu legen; man erhält dadurch die Ebene pqr .

134. Aufgabe III. Aus den Tracen einer Ebene, und der Horizontalprojection der Diagonale eines in dieser Ebene liegenden Quadrates, die Projectionen desselben zu finden.

Das Mittel der Auflösung besteht darin, die gegebene Ebene auf die Horizontalebene umzuklappen, zuzusehen, was dann aus der Diagonale des Quadrates wird, dieses Quadrat in der Umklappung zu construiren, und

hiermit durch die Umklappung zu den Projectionen zurück zu kommen.

Es sei (Fig. III) rst die gegebene Ebene, und ab die Horizontalprojection der Diagonale des Quadrats. Denkt man sich in ab eine verticale Ebene, so wird die Gerade ab selbst ihre horizontale, und eine zu xy perpendikuläre Gerade, wie nn' , ihre verticale Trace sein. Der Durchschnittspunkt m der horizontalen Tracen beider Ebenen gehört zum Durchschnitt dieser beiden Ebenen, so gut als der Durchschnittspunkt n' ihrer verticalen Tracen; fällt man daher mm' perpendikulär zu xy , und zieht die Verbindende $m'n'$, so ergibt sich die Verticalprojection des Durchschnitts beider Ebenen. Auf diesem Durchschnitte befindet sich die Diagonale, dessen Horizontalprojection ab ist; zieht man nun die Projectionslinien aa' , bb' , so wird es leicht sein, die Verticalprojection $a'b'$ dieser Diagonale zu erhalten.

Man drehe die Ebene rst um rs , um sie, wie oben bemerkt wurde, auf die Horizontalebene umzuklappen. Der Punkt n' muss in derselben Entfernung vom Punkt s bleiben und anderer Seits auf die zu rs perpendikuläre nN fallen; folglich kommt er nach N , dem Durchschnitt von nN mit dem, durch den Halbmesser sn' beschriebenen Kreis. Da mithin mN die, die Diagonale des Quadrates enthaltende Gerade wird, so erhält man, durch das Ziehen der, auf rs perpendikulären aA , bB , die Umklappung dieser Diagonale in AB .

Auf AB als Diagonale construiren man daher das Quadrat $ABCD$, führe die Ebene rsN in ihre ursprüngliche Lage zurück, und suche, in welchen Punkten sich dann die Eckpunkte C und D projeciren werden. Zieht man Cp parallel zu sN , so muss sich diese Linie im Raume parallel zu st stellen, und dann horizontal in der zu xy parallelen Geraden pc projeciren; folglich muss die Horizontalprojection des Punktes C auf pc zu liegen kommen. Anderer Seits aber muss sich diese Projection auch auf der zu rs perpendikulären Cc befinden; folglich liegt sie im Durchschnitt c . Daher wird, weil man die Hori-

zontalprojection d des Eckpunkts D auf ähnliche Art findet, $acbd$ die des Quadrates sein.

Die, den c und d entsprechenden Verticalprojectionen liegen auf den Projectionslinien cc' und dd' . Um sie vollends zu bestimmen, führte man CE und DE parallel zu rs , trug die Entfernungen sE und sF auf st in se' und sf' auf, und zog ferner die Geraden $e'd'$ und $f'c'$ parallel zu xy .

Bemerkung. Verlängert man die Linie DA und ihre Projection da , so müssen sie die Trace rs im nämlichen Punkte schneiden. Die nämliche Bestätigung findet für die anderen Seiten des Quadrates und für die Diagonale CD Statt.

Aufgabe IV. Es sind die Projectionen der Kanten eines dreiseitigen Winkels bekannt, man soll die Tracen einer Ebene construiren, welche diese drei Kanten in drei, vom Scheitel ausgegebenen Längen schneidet.

Die Verticalebenen, welche die Kanten des dreiseitigen Winkels enthalten, schneiden sich in einer Verticalen; man denke sich diese Ebenen um diese Linie drehend, um damit sie parallel zur Verticalebene werden, und projicire diese Kanten dann auf dieser Ebene. In dieser Lage projiciren sich die, auf diesen Kanten zwischen dem Scheitel und der verlangten Ebene abgeschnittenen Stücke, vertical je nach ihren wahren Längen, und da diese Längen gegeben sind, so wird es leicht sein, ihre nunmehrigen Projectionen zu erhalten. Man sehe zu, was aus ihnen wird, sobald man diese Kanten in ihre frühere Lage zurückbringt, und wird so die Projectionen dreier Punkte erkennen, durch welche die verlangte Ebene gehen muß, was hinreicht um die Aufgabe zu lösen (26).

Es mögen (Fig. IV) ab und $a'b'$ ac und $a'c'$, ad und $a'd'$ die Projectionen der drei Kanten sein, auf welchen die gesuchte Ebene bekannte Längen α , β , γ abschneiden soll. Man betrachte die erste, und drehe die sie

enthaltende Verticalebene, wie es oben besprochen wurde. Zu diesem Behuf suche man den Punkt b wo sie die Horizontalebene durchdringt, trage ab in am parallel zu xy auf, projicire den Punkt m nach m' auf xy , und findet so, daß die Kante $[ab, a'b']$ nach ihrer Versetzung, $am, a'm$ zu Projectionen hat. Nimmt man dann auf $a'm$ eine Länge $a'p'' = \alpha$, zieht $p''p'$ parallel zu xy , und fällt die ab in p treffende Projectiionslinie $p'p$, so werden p und p' die Projectionen des Punktes sein, wo die erste Kante durch die verlangte Ebene geschnitten wird. Aehnlich so bestimmt man auf den zwei anderen Kanten, die Punkte $[q, q']$ und $[r, r']$; nun ziehe man die Geraden $[pq, p'q']$ und $[qr, q'r']$, stelle deren Tracen dar, und findet endlich mittelst derselben die Trace der verlangten Ebene, welche stu ist.

136. Aufgabe V. Die umschriebene Kugel für eine dreiseitige Pyramide darzustellen.

Die Aufgabe beschränkt sich darauf, den Mittelpunkt und Halbmesser der Kugel darzustellen. Da nun dieser Mittelpunkt in gleichen Entfernungen von vier Eckpunkten liegen muß; so folgt, daß er in den, zur Mitte der Kanten perpendicularen Ebenen enthalten ist (Einleit. 16); nun leuchtet ein, daß es zu dessen Bestimmung genügt, aus den Mittelpunkten dreier Kanten perpendicularäre Ebenen zu errichten. Indessen darf man nicht die Kanten einer und derselben Seitenfläche wählen; weil dann die drei perpendicularären Ebenen sich in einer Geraden, und keineswegs in einem Punkte schneiden würden. Denn es würde jeder Punkt des Durchschnitts zweier dieser Ebenen gleichweit von den Endpunkten dreier Kanten entfernt, und folglich dieser Durchschnitt gänzlich in der dritten perpendicularären Ebene enthalten sein (Einleit. 16). Die im Allgemeinen zur Lösung dieser Aufgabe auszuführenden Constructionen sind von nun an zur Genüge angezeigt; kann man aber die Projectionsebenen beliebig

wählen, so giebt es eine sehr einfache hier zu entwickelnde Auflösung.

Man nehme zur Horizontalebene die, der drei Eckpunkte a, b, c (Fig. V — 1). Es sei auf dieser Ebene d die Projection des vierten Eckpunktes; man ziehe die Verbindende bd , und wähle die Projectionsaxe xy parallel zu bd ; d. h. dafs die Verticalebene parallel zur Kante wird, deren Horizontalprojection bd ist. Ueberdies ist es klar, dafs die Verticalprojectionen der Eckpunkte a, b, c auf xy in Punkten wie a', b', c' liegen, und die, des vierten Eckpunktes sich in irgend einem Punkte n' der zu xy perpendicularen Geraden dd' ergeben wird.

Zieht man nun zuvörderst in der Horizontalebene, Perpendikel aus den Mitten der Seiten des Dreiecks abc , so ist bekannt, dafs diese sich im nämlichen Punkte o schneiden werden. Denkt man sich also drei, in diesen Perpendikeln errichtete Verticalebenen, so werden diese selbst perpendicular zu den Dreieckseiten sein, und zum gemeinschaftlichen Durchschnitt die sich im Punkte o projecirende Verticale haben. Da dieser Durchschnitt den Mittelpunkt der umschriebenen Kugel enthält, so ist man schon gewifs, dafs die Horizontalprojection dieses Mittelpunktes in o , und die Verticalprojection auf der, zu xy perpendicularen Geraden omo' liegt. In der Verticalebene errichte man $f'g'$ perpendicular in der Mitte von $b'd'$, und denke sich in $f'g'$ eine zur Verticalebene perpendicular Ebene. Da xy parallel zu bd ist, so leuchtet ein, dafs diese Ebene perpendicular in der Mitte der Kante $[bd, b'd']$ sein mufs, und dafs sie folglich den gesuchten Mittelpunkt enthält. Folglich liegt die Verticalprojection dieses Mittelpunkts auf $f'g'$; folglich ist sie der Durchschnitt o' von $f'g'$ mit oo' . Man kennt also beide Projectionen o und o' des Kugelmittelpunktes.

Zieht man die Geraden oa und $o'a'$, so werden diese die Projectionen des Halbmessers sein; und indem man $mq = oa$ nimmt, so wird die Hypothenuse $o'p$ die wahre Gröfse dieses Halbmessers darstellen. In der Figur hat

man aus den Punkten o und o' als Mittelpunkten mit einem, der $o'p$ gleichen Halbmesser zwei Kreise construirt, welche als Projectionen von, zu den Projectionsebenen parallelen grössten Kreisen der Kugel angesehen werden können. Im Innern beider Kreise sind die Projectionen aller Punkte der Kugel enthalten.

137. Bemerkungen. Wäre die Projectionssaxe xy in der Ebene des Dreiecks abc beliebig genommen worden, so würde das Perpendikel aus der Mitte von $b'd'$ nicht mehr die Verticalprojection des Mittelpunktes enthalten. Dann vollbringt man die Lösung der Aufgabe sehr schön, auf folgende Art.

Man beschreibt durch die Eckpunkte a, b, c (Fig. V—2) einen Kreis, und bemerkt dafs derselbe zur Kugel gehören mufs. Durch den Punkt d legt man die Sehne fe parallel zu xy , und denkt sich durch dieselbe eine verticale Ebene. Diese Ebene enthält den vierten Eckpunkt, und schneidet die Kugel in einem, sich in wahrer Grösse auf der Verticalebene projicirenden Kreise. Nun aber mufs diese Projection durch den Punkt d' und durch die Projectionen f' und c' der Punkte f und e gehen; beschreibt man folglich durch diese drei Punkte einen Kreis, oder bestimmt vielmehr dessen Mittelpunkt o' , so werden die Punkte o und o' die Projectionen des Kugelmittelpunktes sein, und die Aufgabe unterliegt weiter keiner Schwierigkeit.

138. Aufgabe VI. Die eingeschriebene Kugel für eine dreiseitige Pyramide zu construiren.

Damit eine Kugel in ein Polyeder eingeschrieben sei, ist es erforderlich, dafs sie alle Seiten berührt; folglich mufs ihr Mittelpunkt in gleichen Entfernungen von diesen Seiten liegen. Nun hat man aber gesehen (Einleit. 44) dafs, wenn eine Ebene den Winkel zweier anderen Ebenen halbt, jeder Punkt in der ersteren Ebene gleichweit, und jeder ausserhalb genommene Punkt, ungleichweit von den beiden anderen liegt; folglich mufs

sich der Mittelpunkt der, in eine dreiseitige Pyramide eingeschriebenen Kugel auf den die Flächenwinkel dieser Pyramide halbirenden Ebenen befinden. Schneiden sich aber alle diese Ebenen in einem einzigen Punkte? und kann man anderer Seits, da drei Ebenen zur Bestimmung eines Punktes hinreichen, unausgewählt drei beliebige die sechs Flächenwinkel der Pyramide, halbirende Ebenen wählen?

Zur Beantwortung dieser Fragen werde angenommen, man habe drei, die Kantenwinkel eines Körperwinkels halbirende Ebenen geführt. Da die zwei ersteren Ebenen sich in einer Geraden schneiden, darin nach dem so eben erinnerten Lehrsätze, alle Punkte von den drei Seiten des Körperwinkels gleichweit entfernt sind, so wird, nach demselben Lehrsätze, diese Gerade auch auf der dritten Ebene liegen. Nun betrachte man den, in einer neuen Kante gebildeten Flächenwinkel; die Ebene, welche ihn halbirt, trifft jene Gerade in einem Punkte der von den drei ersten Flächen und der vierten, gleich weit entfernt ist; folglich muß dieser Punkt auch zu den Ebenen gehören, welche die in den zwei übrigen Kanten gebildeten Flächenwinkel halbiren. Hieraus geht hervor, daß die Ebenen, welche die sechs Flächenwinkel einer dreiseitigen Pyramide halbiren, sich in einem einzigen Punkte treffen, und daß man zur Bestimmung dieses Punktes d. i. des Mittelpunktes der eingeschriebenen Kugel, unter diesen Ebenen drei, nicht durch den nämlichen Eckpunkt gehende auswählen muß.

Um die vorliegende Aufgabe allgemein zu lösen, bieten die auszuführenden Constructionen außer ihrer Ausgedehntheit keine weitere Schwierigkeit dar. Um sie zu vereinfachen, werde die Ebene einer Seite als Horizontalebene angenommen. Es mögen ABC diese Seite (Fig. VI) und d, d' die Projectionen des vierten Eckpunktes D sein. Die Verticalprojectionen der Punkte A, B, C liegen auf der Projectionsaxe in A', B', C' . Denkt man sich, nun drei die, mit der Basis ABC gebildeten Flä-

chenwinkel, halbirende Ebenen, so werden dieselben mit der Basis eine dreiseitige Pyramide begränzen, deren Scheitel der gesuchte Mittelpunkt sein wird. Man nenne diesen Scheitel O , bezeichne die drei Seiten dieser neuen Pyramide durch OAB , OAC , OBC , und ihre gegenseitigen Durchschnitte durch OA , OB , OC . Der Punkt O wird bestimmt sein, sobald man die Projectionen dieser Linien kennt; und um diese zu finden, wird man in der Pyramide $OABC$ einen horizontalen Schnitt führen, und dessen Projectionen bestimmen.

Zu diesem Zwecke, nehme man an, es wären durch den Scheitel D der gegebenen Pyramide, verticale Ebenen zu den Seiten der Basis ABC geführt worden, und fasse insbesondere die zu AB perpendikuläre Ebene Dde auf. Da sie die Ebenen ABC und DAB in, zu AB perpendikulären Geraden de , De schneidet, so messen diese den Neigungswinkel dieser Ebenen; dergestalt dafs, führt man eine, diesen Winkel halbirende Gerade, welche die Halbirende (*bissectrice*) heissen mag, dieselbe zur Ebene OAB gehören wird. Man drehe die Ebene Dde um die Verticale Dd , und führe sie parallel zur verticalen Projectionsebene. Dann wird sich die Linie de in der Projectionsebene auf die, der de gleichen ke' projectiren, die Hypothenuse De auf $d'e'$, und die Halbirende auf die Gerade $e'f'$, welche den Winkel $d'ek$ in zwei gleiche Theile theilt.

Nun werde eine beliebige Parallele $x'y'$ zu xy gezogen, und als Trace einer, die Pyramide $OABC$ schneidenden Ebene angesehen. Diese Ebene schneidet die Seite OAB in einer zu AB parallelen Geraden, deren Horizontalprojection bekannt sein wird, sobald man die des Durchschnittspunkts mit der Halbirenden kennt. Wofern man nun aus dem Punkte g' , wo $x'y'$ $e'f'$ schneidet, $g'g''$ fällt, und das Dreieck $d'ke$ in seine ursprüngliche Lage zurückführt, so leuchtet ein, dafs der Punkt g' in einen Punkt zu liegen kommt, welcher der Durchschnitt der Horizontalebene $x'y'$ mit der Halbirenden sein wird,

und der Punkt g'' in einen solchen, der die Horizontalprojection dieses Durchschnitts sein muß; indem man folglich $eg = e'g''$ nimmt, so wird der Punkt g diese Horizontalprojection sein; und führt man durch den Punkt g zu AB die Parallele mn , so ergibt sich die Horizontalprojection des, in der Ebene OAB durch die horizontale Ebene $x'y'$ veranlassten Schnittes. Man construirt gleichfalls die Projectionen mp und np der, durch die nämliche Ebene $x'y'$ in den zwei anderen Seiten der Pyramide $OABC$ bewirkten Schnitte.

Auf diese Weise wird man drei Punkte m, n, p erkennen, durch welche beziehentlich die Projectionen der Kanten OA, OB, OC gehen müssen; und da diese Projectionen durch die Punkte A, B, C gehen, so müssen sie in den Richtungen der Geraden mA, nB, pC liegen. Es müssen sich diese Geraden in einem Punkte o schneiden, welcher die Horizontalprojection des Mittelpunkts der eingeschriebenen Kugel ist. Nimmt man auf der Linie $x'y'$ die, den Punkten m, n, p entsprechenden Verticalprojectionen m, n, d , und zieht die Geraden $m'A', n'B, pC$, so werden diese Linien die Verticalprojectionen der nämlichen Kanten OA, OB, OC sein, und müssen sich folglich in einem Punkte o' schneiden, welcher die Verticalprojection des Mittelpunktes ist (die Gerade oo' muß perpendicular zu xy sein).

Der Kugelhalbmesser läßt sich leicht bestimmen. Denn, da die Horizontalebene eine der Seiten der Pyramide enthält, so gleicht dieser Halbmesser der Höhe des Mittelpunktes über der Horizontalebene; nun aber ist diese Höhe in der Verticalebene durch das, auf xy gefällte Perpendikel $o'r$ gegeben.

Bemerkung. Es kann sich zutragen, daß man die Berührungspunkte der Seiten der Pyramide mit der Kugel zu wissen nöthig hat. Zuvörderst leuchtet ein, daß der Punkt o der Berührungspunkt der horizontalen Seite ABC ist. Um die drei anderen zu erhalten, muß man die Fußpunkte der, aus dem Mittelpunkte O auf die

Seiten DAB , DAC , DBC gefällt Perpendikel suchen. Um z. B. den der Seite DAB zu erhalten, so wird das Beste sein, durch den Punkt o eine zu AB perpendikuläre Ebene zu führen. Diese Ebene wird die Seite DAB in einer Geraden schneiden, welche man, wie dieß die Figur zeigt, auf die Verticalebene umklappt, und welche dann parallel zu $e'd'$ sein wird; fällt man nun aus dem Punkte o' ein Perpendikel auf diese Parallele, führt Alles in die wahre Lage zurück; sieht zu, wohin der Fußpunkt des Perpendikels gelangt; so wird der sich ergebende Punkt der Berührungspunkt der Kugel mit der Seite DAB sein.

Durchschnitte einer Geraden mit einem Kegel oder Cylinder, mit einer Kugel und windschiefen Revolutionsoberfläche.

139. Aufgabe VII. Die Durchschnitte einer Geraden mit einem Kegel oder Cylinder darzustellen.

Angenommen die Oberfläche sei ein Cylinder. Führt man durch die gegebene Gerade, parallel zu den Erzeugenden des Cylinders eine Ebene, so schneidet sie diese Oberfläche in Erzeugenden; und es ist klar, daß die Durchschnittspunkte dieser Erzeugenden mit der gegebenen Geraden, genau die verlangten Durchschnitte sind. Wäre es Statt des Cylinders ein Kegel, so würde man durch die Gerade und den Scheitel eine Ebene führen; übrigens wären die Constructionen die nämlichen.

Der Fall des Cylinders, ist der in der Figur VII entwickelte. Der Cylinder hat zur horizontalen Trace den Umfang $abcd$; er ist horizontal zwischen den Grenzen ce und cf , vertical zwischen $b'g'$ und $d'h'$ projecirt; endlich sind ik und $i'k'$ die Projectionen der gegebenen Geraden. Durch einen beliebigen Punkt $[k, k']$ der gegebenen Geraden hat man eine Gerade den Erzeugenden des Cylinders parallel gelegt, und die horizontale Trace

il der, durch beide Linien bestimmten Ebenen dargestellt. Diese Trace schneidet den Umfang $abcd$ in m und n ; folglich muß die Ebene den Cylinder in den zwei Erzeugenden $[mp, m'p']$ und $[nq, n'q']$ schneiden. Die Projectionen mp, nq treffen ik in r und s ; die Projectionen $m'p', n'q'$ treffen $i'k'$ in r' und s' ; folglich sind die Punkte $[r, r']$ und $[s, s']$ die Durchschnitte des Cylinders mit der gegebenen Geraden.

140. Aufgabe VIII. Die Durchschnittspunkte einer gegebenen Kugel und Geraden zu bestimmen.

Durch die gegebene Gerade führe man eine Ebene, und nehme sie, größserer Einfachheit wegen vertical. Sie schneidet die Kugel in einem Kreisumfange deren Durchschnitte mit der Geraden genau die zu bestimmenden sind; nun aber gelangt man hierzu leicht, indem man die Ebene dieses Umfanges in eine, zur Verticalebene parallele Lage bringt.

Es seien (Fig. VIII) o, o' , die Projectionen des Kugelmittelpunktes, und $ab, a'b'$, die der Geraden. Der Schnitt der Kugel durch die, diese Gerade enthaltende Ebene ist ein Kreis, dessen Durchmesser unmittelbar auf der Horizontalebene gegeben erscheint; denn er gleicht der Sehne cd . Damit die Ebene dieses Kreises parallel zur Verticalebene werde, drehe man sie um den Mittelpunkt o dergestalt, daß die Sehne cd nach ef parallel zu xy zu liegen kommt; dann projecirt sich der Kreis in wahrer Grösse auf der Verticalebene, in einem Kreise dessen Durchmesser $e'f'$ gleich ef oder cd ist. Betrachtet man zwei besondere Punkte $[a, a'], [b, b']$ der gegebenen Geraden, so ist es leicht sich davon zu überzeugen, daß dieselben nach der Drehung die Lagen $[g, g'], [h, h']$ einnehmen, und daß folglich die Verticalprojection der Geraden $g'h'$ sein wird.

Die Durchschnittspunkte der Geraden und des Kreises sind jetzt projecirt; der eine in m' und m , der andere in n' und n . Man hat daher nur noch zu untersuchen, wo-

hin diese Projectionen gelangen, sobald man durch eine rückgängige Drehung, den Kreis und die Gerade in ihre anfängliche Lage versetzt. Beschreibt man zu diesem Zwecke aus dem Mittelpunkte s die Bogen mr und ns , welche ab in r und s treffen, und zieht ferner die $a'b'$ in r' und s' schneidenden Projectionslinien rr' und ss' , so sind die Punkte $[r, r']$ und $[s, s']$ die zwei verlangten Durchschnitte.

141. Aufgabe IX. Die Durchschnittspunkte einer Geraden mit einer windschiefen Revolutionsoberfläche zu bestimmen.

Man denke sich die Gerade werde um die Axe der windschiefen Oberfläche gedreht, und beschreibe so eine zweite windschiefe Oberfläche. Die Durchschnitte beider Oberflächen werden Kreisumfänge sein, welche die gesuchten Punkte enthalten müssen; folglich genügt es diese Umfänge zu bestimmen. Aus der Anmerkung III der Nr. 69 ergibt sich diese Bestimmung leicht.

Es liege (Fig. IX) die nämliche Anordnung zum Grunde, welche schon mehrmals gebraucht wurde; d. h. es werde die Horizontalebene perpendikulär zur Axe der gegebenen Oberfläche genommen, und deren Erzeugende parallel zur Verticalebene. Es seien, a die Horizontalprojection der Axe, $a'a''$ ihre Verticalprojection, bc und $b'c'$ die Projection der Erzeugenden, und ad der Halbmesser des Kehlkreises. Sind ef und $e'f'$ die Projectionen der gegebenen Geraden, so führe man ag perpendikulär zu ef , errichte die Projectionslinie gg' , und ziehe die Horizontale $g'o'$. Es ist klar, daß ag und $o'g'$ die Projectionen der kürzesten Entfernungen der Axe von der gegebenen Geraden sind, so daß wenn man diese Gerade um die Axe dreht, die durch sie erzeugte windschiefe Oberfläche, einen horizontalen, aus dem Mittelpunkte $[a, o']$ mit dem Halbmesser ag beschriebenen Kreis zum Kehlkreis haben wird.

Es werde $ad = R$, und $ag = R'$, $R' > R$ gesetzt, und für sich mittelst eines rechtwinklichen Dreiecks

eine Länge $R'' = \sqrt{R'^2 - R^2}$ dargestellt. Nun betrachte man, an Statt der ersten windschiefen Oberfläche, den asymptoten Kegel derselben, welcher zum Scheitel den Punkt $[a, a']$, und zur Erzeugenden eine zu $[bc, b'c']$ parallele Gerade $[ah, a'c']$ hat; und statt der zweiten windschiefen Oberfläche eine andere, um die nämliche Axe beschriebene, welche noch ihren Mittelpunkt im Punkte $[a, o']$ hat, deren Erzeugende parallel zu $[ef, e'f']$ ist, und deren Kehlkreis zum Halbmesser die Entfernung $ai = R''$ hat. Nach der angezogenen Anmerkung sind die Horizontalebene, welche die Durchschnitte dieser letzteren Oberfläche mit dem Kegel enthalten, die nämlichen als jene der Durchschnittskreise der zwei ersten Oberflächen.

Zur Bestimmung dieser Ebenen suche man die Durchschnitte des Kegels mit der Erzeugenden der letzteren windschiefen Oberfläche. Errichtet man zuvörderst die Projectionslinie ii' , begränzt sie durch die Horizontale $o'g'$, und führt die Linien $ik, i'k'$ beziehentlich parallel zu $ef, e'f'$, so werden diese Linien die Projectionen der fraglichen Erzeugenden sein. Durch den Scheitel $[a, a']$ des Kegels werde die Linie $[al, a'l']$ dieser Erzeugenden parallel geführt, und die horizontale Trace lk der durch diese zwei Linien gehenden Ebene dargestellt. Die Basis des Kegels (d. i. der, mit dem Halbmesser ah beschriebene Kreis) wird durch diese Trace in den Punkten m und n getroffen; folglich sind die Durchschnitte des Kegels und der Ebene, die in am und an projecirten Geraden; und da dieselben ik in p und q schneiden, so schließt man, daß diese Punkte die Horizontalprojectionen der Durchschnittspunkte des Kegels mit der Erzeugenden der windschiefen Oberfläche sind, und leitet ferner hieraus die Verticalprojectionen p' und q' ab.

Im Verlauf der Constructionen begegnet man keiner weitem Schwierigkeit. Durch das Ziehen der zu xy parallelen Linien $p'r'$ und $q's'$, wird man die verticalen Tracen der horizontalen Ebenen erhalten, darin die Durch-

schnittskreise des Kegels mit der letzteren windschiefen Oberfläche liegen. Nun aber ist angeführt worden, daß diese Ebenen die nämlichen sind, als jene welche die den beiden ersteren windschiefen Oberflächen gemeinschaftlichen Kreise enthalten; daher enthalten sie um so mehr, die Durchschnitte der gegebenen Geraden mit der vorliegenden Oberfläche; folglich sind die Punkte r' und s' , wo $e'f'$ durch die Horizontalen $p'r'$ und $q's'$ geschnitten wird, die Verticalprojectionen dieser Durchschnitte. Indem man Perpendikel zu xy fällt, so ergeben sich auf ef die entsprechenden Horizontalprojectionen r und s .

Einige Aufgaben über Berührungen und Oberflächendurchschnitte.

142. Aufgabe X. Eine Gerade und eine Kugel sind gegeben, ebenso ein Kreis dieser Kugel, man soll durch die Gerade eine Ebene führen, welche die Kugel in einem zum gegebenen Kreise berührenden schneidet.

Damit zwei, in beliebigen Ebenen liegende Kreise einander berühren, müssen sie einen Punkt gemein, und in diesem die nämliche Tangente haben. Diese Tangente muß sich in der Ebene eines jeden Kreises befinden, und ist Nichts anderes als der Durchschnitt beider Ebenen; folglich erhält man, durch Verlängerung der gegebenen Geraden bis zu ihrem Durchschnitt mit der Ebene des gegebenen Kreises, einen Punkt dieser Tangente. Dann leuchtet ein, daß es zur Lösung der Aufgabe genügt, durch diesen Punkt zwei Tangenten zu diesem letzten Kreis zu ziehen, und durch die gegebene Gerade zwei Ebenen zu legen deren jede, eine dieser Tangenten in sich enthält.

Man sieht also, daß dieser Aufgabe im Allgemeinen zwei Lösungen zukommen. Es giebt dafür nur eine, sobald die gegebene Gerade den Umfang des gegebenen Kreises trifft, und sie ist unmöglich wenn dieselbe im Innern des Kreises hindurch geht. Wäre die gegebene

Gerade zur Ebene des Kreises parallel; so würde man die zwei Tangenten dieser Geraden parallel führen (was in dem fraglichen Falle stets möglich ist) und die Constructionen wie oben vollenden.

Zur Vereinfachung, nehme man (Fig X) die Ebene des gegebenen Kreises als Horizontalebene. Alsdann setze man o und o' seien die Projectionen des Kugelmittelpunktes, und beschreibe in der Verticalebene aus dem Punkte o' als Mittelpunkt und mit dem Halbmesser der Kugel einen Kreis. Der in diesem Kreise enthaltene Theil $a'b'$ der Projectiionsaxe, wird die Verticalprojection des gegebenen Kreises sein, und seine Horizontalprojection erhalten, indem man aus dem Mittelpunkt o über dem Durchmesser ab gleich $a'b'$ einen Kreis beschreibt.

Es mögen cd , $c'd'$ die Projectionen der gegebenen Geraden sein, welche die Punkte c und d' zu ihren Tracen hat. Die horizontalen Tracen der gesuchten Ebenen müssen durch c gehen, und nach dem bereits Erklärten, erhält man sie, indem man die Tangenten $c\alpha$, $c\beta$ zum Kreis oa zieht. In Betreff der verticalen Tracen ist es klar, daß diese durch den Punkt d' gehen müssen, und jetzt bestimmen sie sich leicht; es sind dieselben die Geraden $\alpha d'$ und $\beta d'$.

Es ist gleichfalls leicht die Mittelpunkte und Durchmesser der Berührungskreise an den Kreis oa zu bestimmen, in denen die Kugel durch die Ebenen $c\alpha d'$ und $c\beta d'$ geschnitten wird. Es möge genügen die Durchmesser darzustellen. Man suche den, welcher in der Ebene $c\alpha d'$ liegt. Auf der, zu $c\alpha$ perpendicularen Linie oe denke man sich eine Verticalebene; diese Ebene wird durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, und perpendicular zur Ebene $c\alpha d'$ sein, und folglich diese Ebene in einer Geraden schneiden, deren in der Kugel enthaltenes Stück der gesuchte Durchmesser sein muß.

Um diesen Durchmesser in wahrer Gröfse zu finden, drehe man die auf oe errichtete Verticalebene dergestalt, daß oe nach oa parallel zu xy kommt. Es ist klar, daß

dann der, in dieser Ebene liegende grösste Kreis der Kugel, sich vertical auf den Kreis $b'a'm'$ projecirt. Die Gerade des fraglichen Durchschnitts geht durch den Punkt a ; und da ausserdem die Ebene cad' die gegebene Linie $[cd, c'd']$ enthält, so folgt, dass der Punkt $[f, f']$ wo diese Linie durch die, auf ae errichtete verticale Ebene geschnitten wird, ein anderer Punkt des nämlichen Durchschnitts ist. Nach der Drehung projecirt sich der Punkt e vertical in a' der Punkt $[f, f']$ in $h'g$, folglich dieser Durchschnitt in der Geraden $a'h'$; und das in dem Kreise enthaltene Stück $a'm'$ ist die wahre Grösse des gesuchten Durchmessers. Auf ganz ähnliche Art wird man den Durchmesser $b'n'$ des in der Ebene $c\beta d'$ liegenden Kreises finden.

143. Aufgabe XI. Ein Cylinder oder ein Kegel von kreisförmiger Basis ist gegeben, man soll an diese Oberfläche eine Berührungsebene legen, welche mit der Ebene dieser Basis, einen gegebenen Winkel bildet.

Gesetzt, die Oberfläche sei ein Cylinder, welcher zur Basis einen, in der Horizontalebene gezeichneten Kreis hat. Durch irgend einen Punkt des Raumes führe man eine Verticale und eine Schräge, welche mit der Horizontalebene den gegebenen Winkel bildet; hierauf werde, indem man diese Schräge um die Verticale dreht ein gerader Kegel erzeugt. Alle Berührungsebenen an diesen Kegel werden mit der Horizontalebene den nämlichen Winkel einschliessen; daher führe man zu diesem Kegel zwei, zu den Erzeugenden des Cylinders parallele Berührungsebenen (81); hierauf zum Cylinder, zu jeder von diesen beiden parallele Berührungsebenen, und die Aufgabe wird gelöst sein.

Handelt es sich um eine conische Oberfläche, so modificirt sich die Lösung etwas. Dann bringe man den Scheitel des Hülfskegels auf den Scheitel des gegebenen Kegels, und erhält die horizontalen Tracen der gesuchten Ebenen, indem man gemeinschaftliche Tangenten zu

beiden Kreisen, den Basen dieser Kegel, führt. Das Uebrige der Construction enthält keinerlei Schwierigkeit.

In diesem Falle, wie in den des Cylinders ist es klar, dafs man im Allgemeinen vier verschiedene Berührungsebenen enthält; aber unter gewissen Voraussetzungen können sie sich auf eine geringere Anzahl beschränken, und es könnte selbst die Aufgabe unmöglich sein.

In der Figur XI wurden nur die, auf den Fall des Cylinders bezüglichen Constructionen entwickelt. Der Cylinder hat zur Basis den, über den Durchmesser ab beschriebenen Kreis, er ist horizontal zwischen den Geraden cd und ef , vertical zwischen $g'h'$ und $i'k'$ projecirt. Durch den beliebig gewählten Punkt $[\alpha, \alpha']$ ziehe man die zur Verticalebene parallele, und mit der Horizontalebene den gegebenen Winkel bildende Gerade $[\alpha\beta, \alpha'\beta']$. Sie durchdringt die Horizontalebene im Punkte β , und indem man dieselbe um die in α errichtete Verticale dreht, so erzeugt sie einen geraden Kegel, welcher zur Basis den, mit dem Halbmesser $\alpha\beta$ beschriebenen Kreis hat, und dessen sämtliche Erzeugenden mit der Horizontalebene einen, dem gegebenen Winkel gleichen Winkel bilden. Durch den Scheitel $[\alpha, \alpha']$ führe man eine Parallele $[\gamma\delta, \gamma'\delta']$ zu den Erzeugenden des Cylinders, und bestimme hierauf, durch das bekannte Mittel (81), die zu diesen Erzeugenden parallelen und den Kegel berührenden Ebenen $\gamma\phi\delta'$, $\gamma\psi\delta'$. Zu diesen Ebenen sind die gesuchten, welche den Cylinder berühren müssen parallel. Man erhält folglich die horizontalen Tracen der gesuchten Ebenen, indem man, den Linien $\gamma\phi$ und $\gamma\psi$ parallele Tangenten zur Basis des Cylinders zieht. Nunmehr ergeben sich ihre verticalen Tracen, indem man Parallelen zu den Linien $\phi\delta'$ und $\psi\delta'$ führt.

Bestätigungen finden sich, indem man die verticalen Tracen der vier Berührungskanten sucht; denn diese Tracen müssen beziehentlich auf den verticalen Tracen der Berührungsebenen liegen. Ueberdies bemerke man, dafs zwei dieser Kanten die nämliche Horizontalprojection ha-

ben, und eben so die beiden andern. Es läßt sich dieß sehr leicht beweisen, daher ein Aufenthalt hiermit unnöthig erscheint.

144. Aufgabe XII. Bestimmung der einer Kugel und einem geraden Kegel gemeinschaftlichen Berührungsebenen.

Man nehme für einen Augenblick an, es wär eine, beiden Oberflächen gemeinschaftliche Berührungsebene gefunden worden. Im Berührungspunkte mit der Kugel werde ein Halbmesser geführt, und auch eine Ebene durch die Axe des Kegels und durch die Berührungskante; dieser Halbmesser und diese Meridianebene werden perpendicular zur Berührungsebene sein. Denkt man sich durch den Mittelpunkt der Kugel eine, der Berührungsebene parallele Ebene, so wird sie durch die Meridianebene in einer, zur Berührungskante parallelen, und von dieser um eine, dem Kugelhalbmesser gleiche Entfernung habenden Geraden, geschnitten. Ausserdem ist es klar, daß sie berührend zu dem, durch Umdrehung dieser Parallele um die Axe des gegebenen Kegels, erzeugten Kegels sein wird. Nun aber ist es leicht, diesen neuen Kegel zu bestimmen, und an ihn durch den Mittelpunkt der Kugel Berührungsebenen zu führen; und nachher wird es auch leicht sein, die verlangten Ebenen zu erhalten, indem man beachtet, daß dieselben, zu jenen Ebenen parallel und berührend zum gegebenen Kegel sind. Da der Hilfskegel inner- oder ausserhalb des gegebenen Kegels liegen kann, so kann die Aufgabe vier verschiedene Lösungen haben, unbeschadet der besonderen Fälle.

In der Figur XII geht die Projectionsaxe durch den Mittelpunkt der Kugel, und die horizontale Projectionsebene ist perpendicular zur Axe des Kegels. Es seien, a der Mittelpunkt der Kugel und ab ihr Halbmesser, c und c' die Projectionen des Scheitels des Kegels, cd und $c'd'$ diejenigen, einer zur Verticalebene parallelen Erzeugenden, und cd der Halbmesser seiner Basis auf der Ho-

rizontalebene. Perpendikulär zu $c'd'$ nehme man $\lambda\mu = \lambda\nu = ab$; ziehe parallel zu $c'd'$ die Linien $\mu\varepsilon'$ und $\nu f'$; betrachte diese Linien als Verticalprojectionen zweier wie cd gerichteten Geraden; suche die horizontalen Tracen e und f dieser Geraden; endlich beschreibe man mit den Halbmessern ce und cf zwei Kreise.

Nach dem oben Bemerkten, ist es zunächst erforderlich durch den Punkt a Berührungsebenen an zwei gerade Kegel zu legen, dessen Basen diese zwei Kreise sind, und nachher zu diesen Ebenen parallele, den gegebenen Kegel berührende Ebenen. Nun aber sind die horizontalen Tracen der ersteren Ebenen die Tangenten ag, ah, ai, ak ; zieht man folglich parallel zu diesen Geraden, Tangenten zum Kreis cd , so ergeben sich die horizontalen Tracen der, der Kugel und dem gegebenen Kegel gemeinschaftlichen Berührungsebenen, nämlich $p\alpha, q\beta, r\gamma, s\delta$. Da diese Ebenen durch den Scheitel $[c, c']$ gehen müssen, so wird es leicht sein, durch gewöhnliche Mittel, ihre verticalen Tracen $\alpha l', \beta m', \gamma n', \delta o'$ zu erhalten.

145. Aufgabe XIII. Durch einen gegebenen Punkt eine, zweien Kugeln gemeinschaftliche Berührungsebene zu führen.

Es mögen a und b (Fig. XIII) die Mittelpunkte beider Kugeln und c der gegebene Punkt sein. Durch diese drei Punkte lege man eine Ebene, wähle sie zur horizontalen Projectionsebene, und ziehe in dieser die Projectionsaxe willkürlich. Zu den in dieser Ebene liegenden größten Kreisen führe man die zwei Tangenten de, fg , welche sich auf der Linie ab in h schneiden werden (es giebt zwei andere sich in n schneidende Tangenten ik und lm , von welchen weiter unten die Rede sein wird); hierauf lasse man dieselben sich um ab gleichzeitig mit den Kreisen drehen. Es werden dieselben einen geraden Kegel beschreiben, und leicht ist es zu erkennen, daß alle Berührungsebenen zu diesem Kegel berührend zu den zwei Kugeln sein werden; indem man folglich zu ihm durch den Punkt c Berührungsebenen führt, so erhält

man schon zwei der Aufgabe entsprechende Ebenen. Nun aber müssen diese Ebenen alle beide durch den Scheitel h und durch den Punkt c gehen; folglich ist die Gerade ch die horizontale Trace einer jeden dieser Ebenen.

Man bestimme deren Berührungspunkte mit der Kugel vom Mittelpunkte a . Zu diesem Zwecke, nehme man wahr, daß diese Punkte auf dem verticalen Kreise liegen, dessen Durchmesser df ist, daß die Ebene dieses Kreises, durch zwei Berührungsebenen in zwei Tangenten zu demselben Kreise geschnitten wird, und daß der Durchschnitt o der Linien ch und df ein Punkt dieser Tangenten ist, klappt man folglich den Kreis auf die Horizontalebene um seinen Durchmesser df um, und zieht zu ihm die Tangenten oP und oP' , so werden die Punkte P und P' in der Umklappung, die gesuchten Berührungspunkte sein. Da sie zur Horizontalprojection den Durchschnitt p von PP' mit df haben, so erhält man deren Verticalprojectionen, indem man auf der zu xy perpendicularen $p\alpha$, $\alpha p' = \alpha p'' = pP$ nimmt. Alsdann führe man durch diese zwei Berührungspunkte, zur Trace ch parallele Horizontalen, und bediene sich derselben um die verticalen Tracen rq' und rq'' zu finden, dergestalt, daß die eine der beiden Berührungsebenen crq' und die andere crq'' sein wird.

Man betrachtete bis jetzt für die vorliegende Aufgabe nur zwei Lösungen, kann aber zu beiden in der Horizontalebene liegenden größten Kreisen zwei andere Tangenten ik und lm ziehen, und mittelst den vorigen, ähnlichen Constructionen zwei andere Berührungsebenen erhalten. Diese beiden Ebenen sind cut' und cut'' .

Um Verwirrung zu vermeiden hat man in der Zeichnung nur die Berührungspunkte der vier Ebenen mit einer der Kugeln dargestellt; es ist ohne Zweifel überflüssig zu erwähnen, daß die Berührungspunkte mit der anderen Kugel sich ähnlich bestimmen.

146. Die in der vorigen Aufgabe angewendeten Betrachtungen führen zur Lösung der folgenden: die Berührungsebenen zu drei gegebenen Kugeln zu finden.

Um die Begriffe festzuhalten, betrachte man die drei Kugeln unter der Voraussetzung, daß sie gänzlich von einander abgesondert sind, und nenne dieselbe A , A' , A'' . Man bestimme wie oben für die zwei Kugeln A und A' die zwei umschriebenen Kegel; der erste, welcher C heißen mag, hat seinen Scheitel außerhalb, und der andere, D genannt, zwischen den zwei Mittelpunkten. Auch bestimme man die zwei analogen, um die Kugeln A und A'' beschriebenen Kegel C' und D' . Diefs vorausgesetzt, so ist es leicht einzusehen, daß jede Berührungsebene zu den drei Kugeln, berührend zu einem der Kegel C und D , und auch zu einem der Kegel C' und D' ist, und daß umgekehrt, jede, diese Bedingungen erfüllende Ebene berührend zu den drei Kugeln sei. Man muß folglich einen der Kegel C' und D' nehmen, was vier verschiedene Systeme giebt, und gemeinschaftliche Berührungsebenen an beide Kegel eines jeden Systems legen.

Was für ein System man betrachten mag, die Berührungsebenen müssen durch die beide Scheitel verbindende Gerade gehen; es beschränkt sich also die Aufgabe darauf, durch diese Gerade, Berührungsebenen zu einem der zwei Kegel zu führen, oder wenn man will, zu irgend einer der drei Kugeln. Für ein jedes System kann man zwei Berührungsebenen erhalten; man erhält daher acht Ebenen, welche gleichzeitig zu den drei Kugeln berührend sein werden. Diese, paarweise gedachten Ebenen, liegen symmetrisch in Bezug auf die, durch die drei Mittelpunkte geführte Ebene, und werden diese Ebenen in der nämlichen Geraden schneiden. Zweie derselben liegen so, daß eine jede die drei Kugeln an der nämlichen Seite in Bezug auf dieselbe, berührt, während jede der sechs anderen, zwei Kugeln auf der einen, und die dritte auf der anderen Seite berührt.

An Statt acht Berührungsebenen, wird man nur vier haben, sobald eine der Kugeln, einer anderen begegnet, und bloß zwei, wenn sie auch die dritte trifft. Die Aufgabe ist unmöglich, sobald eine Kugel durch eine der zwei anderen eingeschlossen wird. Auch kann sie unbestimmt sein, und dieser Fall ereignet sich, wenn der nämliche Kegel die drei Kugeln berührt.

147. Es ist von den, um die Kugeln A' und A'' beschriebenen Kegeln C'' und D'' kein Gebrauch gemacht worden. Indessen muß jede Berührungsebene zu den drei Kugeln auch berührend zu einem dieser Kegel sein, und folglich durch seinen Scheitel gehen. Nun aber haben die sechs Kegel ihre Scheitel in der, durch die Mittelpunkte der drei Kugeln geführten Ebene; betrachtet man daher drei dieser Kegel, welche durch die nämliche Ebene berührt werden, so wird man finden, daß ihre Scheitel auf dem Durchschnitt dieser Ebene mit der Ebene der Mittelpunkte, folglich in gerader Linie liegen.

Es folge nun, wie man unter den sechs Kegeln die Verbindungen unterscheiden kann, für welche es drei Scheitel in gerader Linie giebt:

1) Betrachtet man die Kegel C und C' , so berührt die Berührungsebene die drei Kugeln äußerlich, d. h. sie läßt die drei Kugeln an der nämlichen Seite; daher muß sie zum Kegel C'' berührend sein: folglich haben die Kegel, C , C' , C'' ihre Scheitel in gerader Linie. 2) In der Verbindung C und D' läßt die Berührungsebene die Kugeln A und A' an der nämlichen Seite, geht aber zwischen den Kugeln A und A'' hindurch; mithin liegen die Kugeln A und A'' zu verschiedenen Seiten in Bezug auf diese Ebene; folglich berührt sie den Kegel D'' , folglich haben die Kegel C , D' , D'' ihre Scheitel in gerader Linie. 3) Dieselbe Schlussfolge gilt in Betreff der drei Kegel D , C' , D'' ; ebenso 4) für die drei Kegel D , D' , C'' .

Man sieht, daß die erste Verbindung diejenigen drei Kegel enthält, welche äußerlich die, paarweise betrach-

teten Kugeln berühren, und dafs die drei anderen nur einen einzigen dieser Kegel enthalten.

148. Die oben dargelegte Eigenthümlichkeit, in Betreff der, um drei paarweise genommenen Kugeln, beschriebenen Kegel, führt zu folgenden bemerkenswerthen Satze der ebenen Geometrie: Sind drei in einer Ebene liegende Kreise gegeben, zieht man zu diesen, paarweise genommenen Kreisen, äufserliche Tangenten, und verlängert sie bis zu ihren Durchschnitten, so liegen die drei Durchschnittspunkte stets in gerader Linie.

Denn, man sehe diese Kreise als grösste Kreise dreier Kugeln an, und betrachte die drei Kegel, davon ein jeder äufserlich um zwei dieser Kugeln beschrieben wär; nach dem vorhin Bemerkten, liegen die Scheitel dieser Kegel in gerader Linie auf der, durch die Mittelpunkte der drei Kugeln gehenden Ebene. Nun aber schneidet diese Ebene diese Kugeln in den gegebenen Kreisen, und die Kegel in den, in der Behauptung bezeichneten Geraden; folglich ist der Lehrsatz bewiesen.

Durch ähnliche Schlussfolgen, welche der Leser ohne Zweifel einsieht, kommt man noch zu folgendem Satze: Zieht man zu drei nämlichen, paarweise genommenen Kreisen innerliche Tangenten, d. h. welche sich zwischen den Mittelpunkten dieser Kreise schneiden, so erhält man drei neue Durchschnittspunkte, deren zwei beliebige in gerader Linie mit einem der dreier ersten liegen; dergestalt, dafs die sechs Durchschnittspunkte stets die Durchschnitte von vier Geraden sind.

149. Aufgabe XIV. Eine Gerade und eine Kugel sind gegeben, ein Cylinder ist bestimmt, da derselbe der Geraden parallel und um die Kugel beschrieben sein soll; man for-

dert in diesem Falle die Construction der Projectionen der Berührungscurve, und die horizontale Trace des Cylinders.

Man schneide die Kugel durch eine, zur gegebenen Geraden parallele Ebene in einem größten Kreise, ziehe an denselben dieser Geraden parallel, eine Tangente; ferner denke man sich diesen Kreis und die Tangente um eine, durch den Mittelpunkt zu der nämlichen Geraden parallel geführte Axe, drehend. Der Berührungspunkt beschreibt auf der Kugel einen größten Kreis, dessen Ebene perpendicular zur Umdrehungsaxe ist; und die Tangente erzeugt einen geraden Cylinder dessen Erzeugenden, dieser Axe parallel sind, und welcher in jedem Punkte des größten Kreises die nämliche Berührungsebene wie die Kugel hat. Solches ist der, durch die Aufgabe bestimmte Cylinder; und der größte Kreis, dessen Ebene perpendicular zur Geraden ist, ist die Berührungscurve deren Projectionen dargestellt werden müssen. Zu diesem Zwecke, bedient man sich einer Hilfsprojection, auf einer verticalen, zur gegebenen Geraden parallelen Ebene; der größte Kreis der Berührung projecirt sich als ein, zur Projection der gegebenen Geraden auf dieser Ebene perpendicularer Durchmesser, und es ist von da aus leicht zu anderen Projectionen überzugehen.

Es seien (Fig. XIV) $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, die ursprünglichen Projectionen der gegebenen Geraden, und a , a' die des Kugelmittelpunkts. Nachdem beliebig uv parallel zu $\alpha\beta$ gezogen worden ist, denke man sich, die Hilfsprojection sei auf einer, über uv errichteten verticalen Ebene vollzogen, und drehe diese Ebene um uv , bis zum Zusammenfallen mit der Horizontalebene. Zieht man $a\delta'a''$ perpendicular zu uv und nimmt $\delta'a'' = \delta a'$, so wird der Punkt a'' die neue Projection des Mittelpunktes sein; und da der Halbmesser der Kugel gegeben ist, so kann man mit demselben, und aus den Mittelpunkten a , a' , a'' Kreise beschreiben, welche die Projectionen größter, zu drei Projectionsebenen paralleler Kreise sein werden. Parallel zu

$[a\beta, a'\beta']$ führe man die Linie $[ab, a'b']$, welche die Horizontalebene in b trifft, fälle bb'' perpendicular zu uv , und ziehe $a''b''$, so werden sich die Erzeugenden des Cylinders auf der neuen Ebene in Parallelen zu $a''b''$ projectiren; und der Berührungskreis der Kugel mit dem Cylinder, projectirt sich in dem zu $a''b''$ perpendicularen Durchmesser $c''d''$.

Um zu zeigen, wie man die Projectionen dieses Kreises auf den zwei anderen Ebenen erhält, betrachte man z. B. die in m'' projectirten Punkte. Sie liegen auf einem horizontalen Kreise, dessen Horizontalprojection man erhält, indem man durch den Punkt m'' die Sehne $e''f''$ parallel zu uv zieht, und aus dem Mittelpunkte a , über dem, der Sehne $e''f''$ gleichen Durchmesser ef einen Kreis construirt. Indem man dann die Linie $m''m$ perpendicular zu uv fällt, so werden ihre Durchschnitte m und n mit diesem Kreise, zur Horizontalprojection des Berührungskreises gehören. Zieht man in der anfänglichen Verticalebene die Horizontale $e'f'$ in der nämlichen Höhe über xy , wie $e''f''$ über uv , so wird man auf dieser Horizontale die, den Punkten m und n entsprechenden Projectionen m' und n' nehmen. Durch Wiederholung dieser Constructionen für andere beliebige Punkte, bestimmen sich die zwei Projectionen $cmdn$ und $c'm'd'n'$ des Berührungspunktes.

Die Projection $c''d''$ macht die auf dem größten horizontalen Kreise der Kugel liegenden Punkte bemerklich. Sie sind in a'' projectirt; die entsprechenden Projectionen auf der Horizontalebene sind g und h , und auf der ursprünglichen Verticalebene g' und h' . Der höchste und der niedrigste Punkt treten so gleich hervor; ihre Projectionen auf der Hülfebene sind c'' und d'' , und man folgert daraus die Projectionen c und d , c' und d' , auf den zwei anderen.

Um der Aufgabe zu genügen, muss man noch die horizontale Trace des umschriebenen Cylinders darstellen, was auf die Bestimmung der horizontalen Tracen

einer gewissen Anzahl Erzeugenden hinausläuft. Man ziehe z. B. mM und nN parallel zu $\alpha\beta$, so wie $m''\mu'$ parallel zu $a''b''$, dann ergeben sich die Projectionen zweier Erzeugenden des Cylinders, und ihre horizontalen Tracen M und N werden zur gesuchten Curve gehören. Das Weitere ergibt sich von selbst.

Bemerkung I. Die oben vollzogenen Constructionen lehren, die auf irgend einer Horizontalebene liegenden Punkte des Berührungskreises zu finden: man kann auch diejenigen bestimmen, welche auf, zur ursprünglichen Verticalebene parallelen Ebenen liegen. Man nehme z. B. diejenige, deren horizontale Trace pq ist. Der Durchschnitt dieser Ebene, mit jener darin sich der Berührungskreis befindet, ist eine, die gesuchten Punkte enthaltende Gerade, deren Projectionen auf der Horizontalebene pq , und auf der Hülfebene $c''d''$ sind. Um die Projection dieser Geraden auf der anderen Verticalebene zu erhalten, lege man durch die, auf pq willkürlich gewählten Punkte p und q die Linien $p\phi'p''$, $q\psi'q''$ perpendicular zu uv , und die Linien $p\phi p'$, $q\psi q'$ perpendicular zu xy , nehme hierauf $\phi p' = \phi' p''$, $\psi q' = \psi' q''$, und ziehe endlich $p'q'$, so ist diese die fragliche Projection. Anderer Seits schneidet die, auf pq errichtete Verticalebene die Kugel in einem Kreise, dessen Verticalprojection ein, aus dem Mittelpunkte a' , über einem der Sehne rs gleichen Durchmesser $r's'$ construirter Kreis ist (diese Sehne ist hier ein Durchmesser); folglich haben die, in dieser Ebene liegenden Punkte des Berührungskreises ihre Verticalprojectionen in den Durchschnitten i' und k' . Daraus leitet man nachher die Projectionen i und k ab.

Bemerkung II. Die hier abgehandelte Aufgabe ist die nämliche, welche gelöst werden muß, sobald man voraussetzt, daß eine undurchsichtige Kugel durch unter sich parallele Lichtstrahlen beleuchtet wird und nun fordert: 1) die Curve, welche auf dieser Kugel den beleuchteten vom unbeleuchteten Theil sondert; 2) den

durch diese Kugel auf eine horizontale Ebene geworfenen Schatten.

150. Aufgabe XV. Die Berührungscurve eines Ellipsoides von ungleichen Axen, mit einem Kegel, von gegebenem Scheitel zu bestimmen, welcher zu dieser Oberfläche umschrieben sein soll.

Man denke sich drei Gerade oder Axen, von gegebenen Längen, welche sich gegenseitig in ihren Mitten unter rechten Winkeln schneiden, und beschreibe auf diesen, paarweise genommenen Axen, drei Ellipsen. Bewegt man eine der Ellipsen dergestalt, daß ihre Ebene parallel zu sich selbst bleibt, und vertauscht gleichzeitig ihre Axen, so daß die Scheitel derselben stets auf den anderen zwei Ellipsen liegen, so wird dadurch eine Oberfläche erzeugt, welche man Ellipsoid nennt. Der Durchschnittspunkt der drei gegebenen Axen ist der Mittelpunkt der Oberfläche, und die drei über diesen Axen beschriebene Ellipsen heißen Hauptellipsen.

Zu den Eigenschaften dieser Oberfläche gehören die folgenden, von welchen hier Gebrauch gemacht werden wird. 1) Alle ebenen Schnitte sind Ellipsen, und für parallele Ebenen, ähnliche Ellipsen, d. h. ihre Axen sind proportionirt; daraus folgt, daß die in diesen Ellipsen ähnlich gezogenen Geraden auch proportionirt sind. 2) Führt man durch verschiedene Punkte des nämlichen Schnittes Berührungsebenen zur Oberfläche, so werden sich diese durchgängig in einem einzigen Punkte schneiden; und umgekehrt, wenn man durch einen äußeren Punkt Berührungsebenen zur Oberfläche legt, so werden alle Berührungspunkte auf dem nämlichen ebenen Schnitte dieser Oberfläche befindlich sein. Indem man die Punkte dieses ebenen Schnittes mit dem äußeren allen Berührungsebenen gemeinen Punkte verbindet, so bestimmt man einen zum Ellipsoide umschriebenen Kegel.

Nach der Aufgabe ist der Scheitel des umschriebenen Kegels gegeben, und man hat die Projectionen der

Berührungscurve zu finden. Dazu wähle man die **Projectionsebenen** zweien der Hauptellipsen parallel, vollführe in der Oberfläche horizontale Schnitte, und bestimme die auf diesen verschiedenen Schnitten gelegenen Berührungspunkte. Auch giebt es einige bemerkenswerthe Punkte, welche dargestellt werden sollen.

Es seien (Fig. XV) o, o' die Projectionen des gegebenen Punktes, und a, a' diejenigen des Mittelpunktes des Ellipsoid's; bc und de die Projectionen der Axen der zur Horizontalebene parallelen Hauptellipse, welche H heissen mag; endlich $b'c'$ und $f'g'$ die Projectionen der, zur Verticalebene parallelen Hauptellipse, die V genannt werden wird. Beide Ellipsen H und V erscheinen in den Projectionsebenen in wahrer Grösse. Es werde $bc > ed$ und $ed > f'g'$ angenommen. Diefs voraus gesetzt, so betrachte man den, auf $h'i'$ projecirten Schnitt; derselbe ist eine, der H ähnliche Ellipse, und seine grosse Axe hat hi und $h'i'$ zu Projectionen. Zieht man die, sich in a'' durchkreuzenden Tangenten $h'k', i'l'$, so kann der Punkt $[a, a'']$ als Scheitel eines Kegels angesehen werden, welcher das Ellipsoid in allen Punkten der in $h'i'$ projecirten Ellipse berührt; und indem man durch den gegebenen Punkt $[o, o']$ Berührungsebenen an diesen Kegel führt, so ergeben sich auf dieser Ellipse zwei Punkte der gesuchten Berührungscurve. Nach der, in Nr. 80 erklärten Methode, führe man durch die Punkte $[o, o']$ und $[a, a'']$ eine Gerade, suche den Begegnungspunkt derselben mit der Horizontalebene $h'i'$, und ziehe Tangenten zu der, in dieser Ebene liegenden Ellipse. Um andere Punkte der Berührungscurve zu erhalten, wird man Tangenten zu anderen Ellipsen führen; nun aber kann man die Constructionen dadurch modificiren, indem man stets auf der Ellipse $bdce$ operirt, und diefs ist es, was nun entwickelt werden soll.

Durch den Punkt $[o, o']$ werde eine horizontale Ebene geführt, deren Trace $o'z'$ ist. Der Kegel $a''h'i'$ (dieser abgekürzte Ausdruck bezeichnet den, auf $a''h'i'$ projecirten

Kegel) wird durch diese Ebene in einer, der H ähnlichen Ellipse geschnitten, deren grofse Axe gleich $k'l'$ ist. Zieht man nun die, $a'a''$ in a''' treffende $l'c'$, und nimmt den Punkt $[a, a''']$ als Scheitel eines, die Ellipse H zur Basis habenden Kegels, so ist es leicht einzusehen, dafs dieser Kegel durch die Ebene $o'z'$ in der nämlichen Ellipse wie der andere Kegel geschnitten wird. Diese zwei Kegel können als solche angesehen werden, welche diese Ellipse zur gemeinschaftlichen Basis haben; und da überdies ihre Scheitel auf der nämlichen Verticale liegen, so folgt, dafs diese Berührungskanten dieser Kegel, mit den, durch den Punkt $[o, o']$ gelegten Berührungsebenen, die nämlichen Horizontalprojectionen haben werden. Man wird also diese Projectionen finden können, indem man sich des letzteren Kegels an Statt des ersteren bedient; dann werden die, auf der Ellipse $h'i'$ liegenden Berührungspunkte leicht zu erkennen sein.

Im Augenblicke mufs man daher durch den Punkt $[o, o']$ Berührungsebenen an den Kegel $a'''h'i'$ führen. In Folge dessen, ziehe man die Projectionen $oa, o'a'''$ der, durch diesen Punkt und den Scheitel $[a, a''']$ gehenden Geraden; leite daraus die Projectionen m und m' des Begegnungspunktes derselben mit der Ebene der Ellipse H ab; führe die Tangenten mn, mp zur horizontalen Projection dieser Ellipse, und erhält, indem man an und ap zieht, die Horizontalprojectionen der zwei Berührungskanten.

Wär' die Horizontalprojection der Ellipse $h'i'$ gezogen, so würden ihre Durchschnitte mit an und ap Horizontalprojectionen der gesuchten Punkte sein. Da aber diese Projection eine, der $bdce$ ähnliche Ellipse ist, und hi zur grofsen Axe hat, so müssen diese Durchschnitte an und ap theilen, wie ae in i getheilt ist; folglich erhält man diese Durchschnitte, indem man die Geraden cn, cp und ihre Parallelen iq, ir zieht. Indem man auf $h'i'$ die, den Punkten q und r entsprechenden Verticalprojectionen nimmt, so werden die beiden in q, q' und r, r' projecirten Punkte zur, in der Aufgabe verlangten Berührungs-

curve gehören. Durch Wiederholung der nämlichen Constructionen, erhält man die Projectionen dieser Curve, so wie die Zeichnung solche darstellt.

Wir kommen nun zur Darstellung der bemerkenswerthen Punkte.

1) Die auf den Hauptellipsen liegenden Punkte. Um die Projectionen der auf der Ellipse H gelegenen zu erhalten, genügt es, die Tangenten os und ot zur Ellipse $h'ace$, und die Projectionslinien ss , tt' zu ziehen. Die auf der Ellipse V liegenden Punkte sind dadurch zu bestimmen, indem man durch den Punkt o' Tangenten zur Projection $b'f'c'g'$ dieser Ellipse zieht; und man wird ähnlich so die, in der dritten Hauptellipse befindlichen Punkte finden, indem man den Punkt $[o, o']$ auf diese Ebene projecirt, und durch diese Projection Tangenten zu dieser Ellipse führt.

2) Von den Punkten, welche in der, durch den gegebenen Punkt $[o, o']$ und den Mittelpunkt $[a, a']$ geführten verticalen Ebene liegen. Diese Ebene schneidet die Oberfläche in einer Ellipse deren Axen gleich $\alpha\beta$ und $f'g'$ sind; und wenn man durch den gegebenen Punkt Tangenten zu dieser Ellipse zieht, so werden die Berührungspunkte diejenigen sein, um welche es sich handelt. Um sie zu erhalten, macht man die Ebene der Ellipse parallel zur Verticalebene, indem man sie um die, in a errichtete Verticale dreht. Dann projecirt sich die Ellipse in wahrer Gröfse auf der Verticalebene, und nimmt man $a'\alpha' = a'\beta' = a\alpha$, so werden $\alpha'\beta'$, $f'g'$ die Axen dieser Projection sein; gleichzeitig projecirt sich der gegebene Punkt in o'' . Sind die Axen einer Ellipse bekannt, so weifs man ihre Brennpunkte zu finden, und kann hierauf, ohne die Curve zu zeichnen, die Punkte darstellen, wo sie durch die, aus einem gegebenen Punkte entspringenden Tangenten berührend wird (man sehe die gewöhnlichen Lehrbücher der analytischen Geometrie). Es ist dieses Verfahren in der Zeichnung dargelegt worden, γ' und δ' sind die Berührungspunkte. Führt man die Ellipse

in ihre anfängliche Lage zurück, so ergeben sich ohne Schwierigkeit die Projectionen u und u' , v und v' , der zwei gesuchten Punkte.

Einer dieser Punkte ist der tiefste der Berührungscurve, und der andere der höchste. Davon überzeugt man sich, indem man bemerkt, dafs, wollte man nach der allgemeinen Methode, Punkte dieser Curve suchen, welche auf einem horizontalen Schnitte unter u' oder über v' gelegen wären, der gegebene Punkt $[o, o']$ im Innern der Kegel enthalten sein würde, zu welchen von diesem Punkte aus, Berührungsebenen geführt werden müßten, was unmöglich wär.

Die Zeichnung stellt noch die Constructionen dar, wodurch die Punkte bekannt werden, welche in der, perpendicular zur Verticalebene durch den gegebenen Punkt und den Mittelpunkt des Ellipsoids geführten Ebene liegen. Sie unterscheiden sich von den vorigen nur dadurch, dafs die Verticalebene die Horizontalebene ersetzt *et. v. v.*

Bemerkung. Die hier umständlich behandelte Aufgabe ist offenbar dieselbe, wie die folgende: Ein Ellipsoid werde durch einen hellen Punkt beleuchtet, welches ist auf dieser Oberfläche die, Licht und Schatten trennende Curve?

151. **Aufgabe XVI.** Angenommen, eine Gerade gleitet parallel zu sich selbst am Rande einer Nische; man verlangt die Linie, welche sie im Innern der Nische beschreibt, oder was das Nämliche ist, den Schlagschatten des eigenen Randes der Nische.

Es sei xy (Fig. XVI) die Projectionsaxe, welche auf dem Grunde der Nische selbst gezogen sein mag. In einer horizontalen Ebene, deren verticale Trace $x'y'$ ist, werde ein Halbkreis beschrieben, etwa der, dessen Projectionen acb und $a''b''$ sind. Man denke sich ein verticaler, diesen Halbkreis zur Basis, habender Cylinder, sei von einer horizontalen, durch $a'b'$ angezeigten Ebene be-

gränzt, und es käm oberhalb dieses Cylinders das Viertel einer Kugel vor, welche den nämlichen Mittelpunkt $[o, o']$ und denselben Halbmesser $o'a'$ wie die obere Basis des Cylinders hat. Der hinter der Verticalebene gebildete, und durch den Cylinder und das Viertel der Kugel eingeschlossene leere Raum ist eine Nische. Man bedingt, daß eine Gerade einer gegebenen Geraden $[\alpha\beta, \alpha'\beta']$ parallel, am Rande $a''a'h'b'$ gleitet, und fordert die Projectionen der Linie, welche sie auf der inneren Oberfläche der Nische beschreibt. Diese Linie besteht aus drei Theilen, welche nach einander bestimmt werden sollen.

1) Ein Theil wird auf der cylindrischen Oberfläche beschrieben, während die Gerade sich längs der in $a''a'$ projecirten Geraden bewegt. Bei dieser Bewegung nun leuchtet ein, daß die Gerade in einer verticalen Ebene bleibt, deren horizontale Trace ac parallel zu $\alpha\beta$ ist, und dessen Durchschnitt mit dem Cylinder eine, horizontal in c , und vertical in $c''c'$ projecirte Erzeugende; führt man daher $a'c'$ parallel zu $\alpha'\beta'$ und begränzt $c''c'$ durch diese Parallele, so wird man die Linie erhalten, welche die bewegliche Gerade in diesem Cylinder beschreibt, indem sie sich bis zum Punkt $[a, a']$ erhebt.

2. Der zweite Theil rührt vom Durchschnitt des Cylinders der Nische, mit dem schiefen Cylinder her, welcher die bewegliche Gerade erzeugt, indem sie auf den, vertical in $a'h'b'$ projecirten Kreis gleitet. Man wird daher verschiedene Erzeugende $[de, d'e']$, $[fg, f'g']$, ... des schiefen Cylinders nehmen, bemerken, daß die Bewegungspunkte derselben mit dem Cylinder der Nische in $e, g, \dots$ auf der Horizontalebene projecirt sind, und deren Verticalprojectionen in $e', g', \dots$ durch das Errichten der Projectionslinien $ee', gg', \dots$ erhalten. Es hat sich so die, zwischen dem Punkte c' und der Horizontale $a'b'$ eingeschlossene Curve $c'e'g'r'$ ergeben. Man wird sogleich in der Bemerkung ansehen wie

der, auf dieser Horizontale befindliche Punkt r' darzustellen sei.

3. Der letzte Theil der gesuchten Linie ist eine, aus dem Durchschnitt des die Nische begrenzenden Kugelquadranten, mit dem oben besprochenen schiefen Cylinder, hervorgegangne Curve. Man wird die Punkte dieser Curve erhalten, indem man diese zwei Oberflächen durch, zu den Erzeugenden des Cylinders parallele Ebenen schneidet, und dieselben grösserer Einfachheit wegen, perpendicular zur verticalen Projectionsebene wählt. Da jede dieser Ebenen eine Erzeugende des Cylinders und einen Kreis der Kugel enthält, so ist der Durchschnitt dieses Kreises mit der Erzeugenden ein Curvenpunkt. Hierbei ist es jedoch rathsam, von einer Hilfsprojection Gebrauch zu machen, welche man auf einer, zu diesen Schnitten parallelen Ebene ausführen wird, damit die Kreise dieser Schnitte sich in wahrer Grösse projeciren.

Es werde beliebig $\omega\eta$ parallel zu $\alpha'\beta'$ gezogen, und durch $\omega\eta$ eine, zur Verticalebene perpendicularäre Ebene gedacht, und auf dieser Ebene die Hilfsprojection ausgeführt dergestalt, dafs sie sich als auf die Verticalebene, um die Linie $\omega\eta$ umgeklappt darstellt. Da alle parallelen Schnitte der Kugel, vertical auf den, zu $\alpha'\beta'$ parallelen Geraden $h'p'$, $l'q'$, ... projecirt sind, so ergeben sich die Projectionen dieser Kreise auf der neuen Ebene, indem man auf $\omega\eta$ die Perpendikel $o'\omega$, $h'\eta$, $l'\lambda$, ... fällt, und aus dem Mittelpunkte ω mit den Halbmessern $\omega\eta$, $\omega\lambda$, ... Kreise beschreibt. Es sind nun noch, auf der neuen Ebene die Projectionen der, im schiefen Cylinder vollführten Schnitte zu bestimmen, d. h. der, zu $[\alpha\beta, \alpha'\beta']$ parallelen, und von den in $h'l'$, ... ausgehenden, Erzeugenden. Es sei $[hk, h'k']$ die Erzeugende, und $[k, k]$ ein Punkt derselben; aus der Horizontalprojection ist die Entfernung zk zu erkennen, in welcher dieser Punkt hinter der Verticalebene liegt. Man fälle daher $k\epsilon$ perpendicular auf $\omega\eta$, nehme $\epsilon\gamma = zk$, und

ziehe die Verbindende $\eta\gamma$, so wird die Erzeugende $[hk, h'k']$ auf der Hülfssebene in $\eta\gamma$ projecirt sein. Die anderen Erzeugenden werden sich in Parallelen zu dieser Geraden projeciren; und die Durchschnitte $\phi, \psi, \dots$ dieser Parallelen mit den entsprechenden Kreisen, bestimmen auf der Hülfssebene die Projection der gesuchten Curve.

Jetzt ist es leicht, deren Projectionen $u'n'r, unr$ auf den ursprünglichen Ebenen zu erhalten. Betrachtet man z. B. den in ν projecirten Punkt, so folgert man daraus zunächst die Verticalprojection n' , und alsdann die Horizontalprojection n . In diesen Constructionen muss man den durch die, zum Kreis $a'h'b'$ berührende Parallele, gegebenen Punkt $[u, u']$ bemerken.

Bemerkung. Die Projection der letzteren Curve auf der Hülfssebene, ist eine gerade Linie. Denn zieht man $\omega\phi, \omega\psi, \dots$, so sind alle Dreiecke $\phi\eta\omega, \psi\lambda\omega, \dots$ gleichschenkelig, und ihre Grundlinien $\eta\phi, \lambda\psi, \dots$ parallel, folglich die Winkel $\omega\eta\phi, \omega\lambda\psi, \dots$ unter sich gleich, sowie die anderen an diesen Grundlinien liegenden Winkel. Es sind folglich die Winkel $\delta\omega\phi, \eta\omega\psi, \dots$ auch gleich, und mithin die Punkte $\omega, \phi, \psi, \dots$ in gerader Linie; oder besser, was auf Eins hinauskommt, die im Innern der Kugel beschriebene Curve, ist ein größter Kreis dessen Ebene perpendicular zur Ebene der Hilfsprojection ist. *)

Hieraus ergiebt sich ein letztes Mittel Punkte der Curve zu erhalten, welche auf beliebigen Kreisen der Kugel liegen. Gesetzt man wollte den auf dem horizontalen Kreise $a'b'$ gelegenen Punkte haben, so suche man die Gerade des Durchschnits der Ebene dieses Kreises

*) Ueberhaupt, wenn zwei Oberflächen der zweiten Ordnung eine ebene Curve gemein haben, und sich noch in einer zweiten Linie schneiden, so ist diese letztere Linie auch eben. Die Kugel und der Cylinder von kreisförmiger Basis sind Oberflächen zweiter Ordnung.

mit derjenigen der Curve, und der Durchschnitt dieser Geraden mit dem gegebenen Kreise wird der gesuchte Punkt sein. Diese Gerade ist auf der Verticalebene in $a'b'$, und auf der Hülfebene in $\phi\omega$, projecirt; folglich erhält man auf diesen Ebenen die Projectionen $b'\sigma$, eines Punktes dieser Geraden, indem man $\sigma b'\Theta$ perpendicular zu $\omega\eta$ zieht, und die Entfernung dieses Punktes von der Verticalebene wird gleich $\Theta\sigma$ sein. Nimmt man dann auf bb'' , $bs = \Theta\sigma$, so gehört der Punkt s zur Horizontalprojection des Durchschnitts der zwei Ebenen. Ausserdem gehen diese zwei Ebenen durch den Mittelpunkt der Kugel, ihr Durchschnitt geht auch hindurch, und folglich ist die Gerade os dessen Horizontalprojection. Der Durchschnitt r dieser Geraden mit dem Halbkreise acb ist folglich die Horizontalprojection des gesuchten Punktes, und nun durch die Projectionslinie rr' die Verticalprojection bekannt.

Die Constructionen, durch welche man den Punkt $[r, r']$ bestimmte, wurden bereits für einen ähnlichen Fall in der Aufgabe XIV gebraucht.

152. Den Durchschnitt zweier Revolutions-Ellipsoide zu projeciren, deren Axen nicht in der nämlichen Ebene liegen.

Um im Allgemeinen Punkte des Durchschnitts zweier Revolutionsoberflächen zu finden, gebraucht man Curven, welche selbst durch Punkte dargestellt werden müssen (127); in der gegenwärtigen Aufgabe aber, können die gerade Linie und der Kreis oft hinreichen; noch werde die Verticalebene den Axen $[aa_1, a'a''']$ und $[bb_1, b'b''']$ der Oberflächen parallel gewählt, die Projectionsaxe jedoch in dieser Ebene willkürlich gezogen. Uebrigens werde das Gegebene so wie die Fig. XVII diefs veranschaulicht, angenommen.

Schneidet man die zwei Ellipsoide durch, unter sich parallele, und zur Verticalebene perpendicularäre Ebenen, wie jene deren verticale Tracen $e'h' i'm', \dots$ sind, so werden in beiden Oberflächen die Schnitte Ellipsen

sein. Die Sehnen $e'f'$, $i'k'$, ... sind die Axen der durch die erste Oberfläche hervorgegangenen Ellipsen, die anderen Axen werden, in den Mitten dieser Sehne errichtete Perpendikel zur Verticalebene sein, und alle diese Ellipsen sind unter sich ähnlich. Eben so sind die Sehnen $g'h'$, $l'm'$, Axen der Ellipsen von der zweiten Oberfläche, die anderen Axen dieser Ellipsen sind, in den Mitten dieser Sehnen zur Verticalebene errichtete Perpendikel, und diese Ellipsen unter sich auch ähnlich.

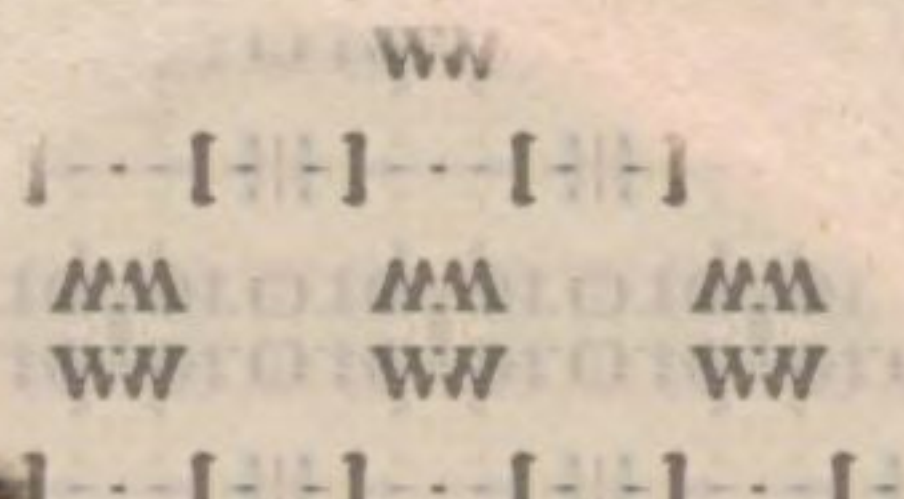
Man betrachte die zwei Ellipsen eines und desselben Schnittes, und denke sich zwei, durch eine Gerade beschriebene Cylinder, welche auf diesen Ellipsen parallel zu einer, in der Verticalebene willkürlich gezogenen Geraden, fortgleitet. Die horizontalen Tracen dieser Cylinder müssen im Allgemeinen Ellipsen sein, deren jede eine Axe perpendikulär zu xy , und der horizontalen Axe des entsprechenden Schnittes gleich hat. Nun aber ist es stets möglich den Erzeugenden eine solche Lage zu geben, daß die Trace eines dieser Cylinder ein Kreis sei; und wenn dann die sich durch die zwei Oberflächen ergebenden Ellipsen unter einander ähnlich wären, so würde die Trace des zweiten Cylinders auch ein Kreis sein, und in Folge dessen, der Durchschnitt beider Kreise die, den zwei Cylindern gemeinschaftlichen Erzeugenden erkennen lassen. Nachher würden die Durchschnitte dieser Erzeugenden mit der Ebene der zwei Ellipsen zwei Punkte der, den vorgelegten Oberflächen gemeinen Curve geben. Man sieht, daß es zuvörderst darauf ankommt, die Parallelen $e'h'$, $i'm'$, ... so zu wählen, daß die in einem dieser Ellipsoide geführten Schnitte denen des anderen ähnlich wären; und alsdann die Richtung der Erzeugenden der Hülfs cylinder zu bestimmen, damit deren horizontale Tracen Kreise sind.

Durch den Mittelpunkt c' der Ellipse $a'a''a'''$ ziehe man $c'\beta$, $c'\beta'$ beziehentlich parallel zu den Halbaxen $d'b'$, $d'b''$, der anderen Ellipse; nehme $c'\beta'$ der Halbaxe $c'a''$

der ersten Ellipse gleich, und $c'\beta$ als viertes Glied der Proportion $d'b'' : d'b' :: c'\beta' : x$; ferner beschreibe man über den Halbaxen $c'\beta$ und $c'\beta'$ die, der $b'b''b'''$ ähnliche Ellipse $\beta\beta'\beta''$. Sie schneidet die erste Ellipse in zwei Punkten, und es werde einer derselben e' , mit dem Mittelpunkte c' verbunden. Wär' ein drittes Ellipsoid durch die Ellipse $\beta\beta'\beta''$ um die Axe $c'\beta$ erzeugt worden; so sieht man leicht, dass die, durch $o'e'$ perpendicular zur Verticalebene gelegte Ebene, dieses dritte Ellipsoid, so wie das erste, in gleichaxigen Ellipsen schneiden würde; folglich wären die, zu dieser Ebene parallel, in den zwei Oberflächen vollführten Schnitte ähnlich; und da überdies die, durch die nämlichen Ebenen im zweiten Ellipsoid entstandenen Schnitte, denen des dritten ähnlich sein würden; so folgt dass sie es auch zu denen des ersten wären. Die Linie $c'e'$ bestimmt also eine Richtung welcher man den schneidenden Ebenen geben kann, um in diesen zwei Oberflächen ähnliche Ellipsen zu erhalten.

$c'n'$ ziehe man parallel zu xy und der Halbaxe $c'a''$ gleich, ferner eine Gerade durch die Punkte e' und n' . Nimmt man die Erzeugende der Hülfszylinder parallel zu dieser Geraden, so werden die horizontalen Tracen dieser Cylinder Kreise sein. Denn, betrachtet man insbesondere den Cylinder, welcher zur Basis die, der $e'c'f'$, auf der ersten Oberfläche entsprechende Ellipse hat, so wird dessen horizontale Trace eine Ellipse sein, deren Axe gleich $2c'n'$, und deren andere der, in c' , in den zu $c'e'$ perpendicularen Schnitte, errichteten Axe gleich ist; da nun diese letztere gleich $2c'a''$ oder $2c'n'$ ist, so ist die horizontale Trace des Cylinders ein Kreis. Jetzt ist, die Trace des Cylinders, welche zur Basis den, durch die nämliche Ebene in der zweiten Oberfläche, bewirkten Schnitt hat, auch ein Kreis; und so verhält es sich noch mit allen anderen zu diesen parallelen, in den zwei Oberflächen geführten Schnitten.

Bevor weiter gegangen wird, erinnern wir daran, dass in einer Ellipse die Mitten der parallelen Sehnen



auf einem Durchmesser liegen. Zieht man daher in jeder der zwei in der Verticalebene gegebenen Ellipsen einer Sehne parallel zu $c'f'$, und eine Gerade durch den Mittelpunkt und durch die Mitte dieser Sehne, so ergeben sich die Durchmesser, welche die zu $c'f'$ parallelen Sehnen in ihren Mitten schneiden. Es sei Θ_φ die, der ersten Ellipse, und $\varphi\psi$ diejenige der zweiten. In Bezug auf die Elipsoide, muß man sie als verticale Projectionen zweier Durchmesser anseh'n, deren horizontale Projectionen aa_1 und bb_1 sind, welche die Mittelpunkte der parallelen Schnitte enthalten.

Die vorliegende Aufgabe bietet keine weitere Schwierigkeit dar, und die Constructionen ergeben sich von selbst. Es habe die schneidende Ebene $i'm'$ zur verticalen Trace. Man sehe die zwei in den beiden Oberflächen bestimmten Ellipsen als Basen der zwei, zur Geraden $e'n'$ parallelen Cylinder an. Da diese Ellipsen ihre Mittelpunkte in o' und d' projecirt haben, so ist es leicht, durch deren Mittelpunkte Parallelen zu $e'n'$ zu ziehen, und die horizontalen Tracen p und r derselben zu bestimmen: diese Punkte q und r sind die Mittelpunkte der Kreise, in welchen die zwei Cylinder die Horizontalebene treffen. Weil die erste Ellipse einen ihrer Punkte in i' , und die zweite einen derselben in l' projecirt hat, so ist es nicht minder leicht die horizontalen Tracen s und t , der durch die Punkte gehenden Erzeugenden zu erhalten. Die Entfernungen qs und rt werden die Halbmesser der zwei Kreise sein; man kann diese folglich ziehen, und wird durch ihre Begegnungen in u und s mit den zwei, beiden Cylindern gemeinschaftlichen Erzeugenden bekannt. Stellt man die Verticalprojectionen $u'v'$, $z'w'$ dieser Erzeugenden dar, so ergeben sich auf $r'm'$ die Verticalprojectionen v' , w' , der beiden Ellipsen gemeinschaftlichen Punkte, und man folgert daraus sofort die Horizontalprojectionen v , w . Andere Schnitte geben neue Punkte, und man gelangt so zu zwei in der Zeichnung

ausgeführten Curven, welche die Projectionen des Durchschnits, der zwei Ellipsoide sind.

Bemerkung. Wird das erste Ellipsoid verlängert so erhält man $c'e' > c'a''$. Dann könnte man ein rechtwinkliges Dreieck darstellen, welches $c'e'$ zur Hypothense hätte, und dessen eine Cathete $c'a'$ sei. Um die Figur nicht zu verändern, werde angenommen, $e'c'n'$ sei dieses Dreieck, und die Linie xy , welche willkürlich blieb, parallel zu $c'n$. Dann werden die zwei Hülfszylinder zur Horizontalebene perpendikulär, die elliptischen Schnitte sich auf dieser Ebene in Kreisen projiciren, und die Constructionen vereinfacht. Diese Lösung könnte aber keineswegs auf abgeplattete Ellipsoide angewendet werden, während die vorangehende keine Ausnahme erleidet, ausser in dem Falle wo die Ellipse $\beta\beta'\beta''$ der Ellipse $a'a''a'''$ nicht begegnet.

153. **Aufgabe XVIII.** Einen Punkt zu bestimmen, dessen Entfernungen von drei festen Punkten bekannt sind.

Man sieht leicht, dass der fragliche Punkt der Durchschnitt dreier Kugeln ist, welche die festen Punkte zu Mittelpunkten haben, und deren Halbmesser den drei gegebenen Entfernungen gleich sind. Es werde zur horizontalen Projectionsebene die, durch die drei festen Punkte A, B, C (Fig. XVIII) gehende, und zur Projectionensaxe ein Perpendikel xy zu einer der Seiten des Dreiecks ABC , zu AB z. B. angenommen (man wird den Grund sogleich einsehen). Aus den Punkten A, B, C als Mittelpunkten, beschreibe man mit, den gegebenen Entfernungen gleichen Halbmessern, drei Kreise in der Horizontalebene, wodurch sich drei grösste, beziehentlich dreien Kugeln angehörige Kreise ergeben, welche den gegebenen Punkt enthalten. Die erste Kugel schneidet jede der anderen in verticalen Kreisen, welche zu Horizontalprojectionen, und zu Durchmessern die zwei Sehnen de und fg haben. Ihr Durchschnittspunkt m ist folglich die Horizontalprojection des gesuchten Punktes. Um

daraus die Verticalprojection zu erhalten, bemerke man dafs, da de zu xy parallel ist, der über de beschriebene verticale Kreis, sich auf der Verticalebene in wahrer Gröfse projeciren mufs; offenbar ergiebt sich nun diese Projection, indem zu xy die Perpendikel dd' , ee' gefällt werden, und man über dem Durchmesser $d'e'$ einen Kreis beschreibt; zieht man daher die Projectionslinie mm' , so werden die zwei Durchschnitte m' und m'' mit diesem Kreise, die Verticalprojectionen der zwei, der Aufgabe entsprechende Punkte sein.

Treffen sich die zwei Sehnen de und gf im Innern der Kreise nicht, sondern nur in deren Verlängerungen aufserhalb, so wird die Aufgabe unmöglich sein.

Bemerkung. Die zwei, vermittelt der Durchschnitte der ersten Kugel mit den zwei anderen, bestimmten Punkte, müssen sich im Allgemeinen auf dem Durchschnittskreis der zweiten und dritten befinden. Da nun dieser Kreis auf der Sehne hi projecirt ist, so mufs dieselbe daher durch den Punkt m gehen. Folglich begegnen sich die drei, durch die Durchschnittedreier, in einer Ebene construirter Kreise in einem einzigen Punkte.

Dafs sich diese Sehnen inner- oder aufserhalb schneiden, dieser Satz ist stets wahr, und leicht durch die Geometrie zu beweisen.

154. Aufgabe XIX. Aus den gegebenen Neigungswinkeln der, von einem gewissen Punkte im Raume, nach drei bekannten Punkten gerichteten Gesichtslinien, die Lage dieses Punktes zu finden.

Man nehme nochmals (Fig. XIX) zur Horizontalebene die, durch die drei bekannten Punkte A , B , C , gehende, und zur Verticalebene eine, zur Seite AB des Dreiecks ABC verticale Ebene; beschreibe die, den gegebenen Winkeln entsprechenden Segmente APB , AQC , BRC , und erzeuge durch Drehung dieser Segmente, beziehentlich um ihre Grundlinien AB , AC , BC , drei Re-

volutionsoberflächen. Jedem auf der ersten Oberfläche genommenen Punkte kommt die Eigenschaft zu, daß der, durch die Geraden, welche ihn mit A und B verbinden, gebildete Winkel, dem zuerst gegebenen gleich ist; für einen inner- oder außerhalb dieser Oberfläche liegenden Punkt, würde der so gebildete Winkel größer oder kleiner sein. Hieraus folgt, daß der Punkt, dessen Lage bestimmt werden soll auf dieser Oberfläche liegt; ähnliche Schlüsse thun dar, daß er sich gleichfalls auf den zwei anderen befinden muß. Es beschränkt sich also die Aufgabe darauf einen, dreien Revolutionsoberflächen gemeinschaftlichen Punkt zu finden, deren Axe in der nämlichen Ebene liegen. Zu diesem Behuf, bestimme man (126) die Durchschnittscurven der ersten Oberfläche mit den zwei anderen; und es werden die, beiden Curven gemeinen Punkte, der Aufgabe Genüge leisten.

Indem man, der erwähnten Nummer gemäß die, durch die Segmente APB und AQC erzeugten Oberflächen durch Kugeln schnitt, welche den Punkt A zum gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, so ergab sich als Horizontalprojection des Durchschnitts der zwei Oberflächen, die Curve $AmnD$; und, indem man die erste und dritte Oberfläche durch Kugeln vom gemeinschaftlichen Mittelpunkte B schnitt, fand man auf der horizontalen Projection die Curve $BmnE$. Da die verticalen Projectionen unnöthig sind, so hat man sie nicht dargestellt. Die Durchschnittspunkte m und n dieser zwei Curven, sind die Horizontalprojectionen der, beiden Oberflächen gemeinschaftlichen Punkte. Da dieselben aber durch Begegnung zweier Curven erhalten wurden, so könnte man wegen der Richtigkeit ihrer Lage Zweifel haben, und es gerathen sein, sie zu prüfen. Um aber den Punkt m z. B. zu bestätigen, genügt es, die Linien mf , mg , mh beziehentlich perpendicular zu den Seiten AB , AC , BC zu ziehen, ferner zu prüfen ob die Punkte f und g in einem, aus dem Mittelpunkte A beschriebenen Kreise liegen, und

die Punkte f und h in einem, aus dem Mittelpunkte B beschriebenen.

Liegen einmal die Horizontalprojectionen m und n gehörig vor, so fließen daraus von selbst die entsprechenden Verticalprojectionen. Denn, die gesuchten Punkte müssen sich auf, um AB durch die Punkte f und i beschriebenen Kreisen befinden; da nun diese Kreise zur Verticalebene parallel sind, so erhält man auf der Stelle ihre Projectionen auf dieser Ebene, indem man AB bis nach O' verlängert, die Perpendikel ff' und ii' auf xy fällt, und aus dem Mittelpunkte o' mit den Halbmessern $o'f'$ und $o'i'$ Kreise beschreibt; folglich hat man dann nur noch die, beziehentlich von diesen zwei Kreisen begränzten Projectionslinien mm' , nn' zu ziehen. Man muß also zwei Punkte ober- und zwei unterhalb xy finden; in der Zeichnung jedoch, wurden nur die zwei ersteren angemerkt, was darauf zurückführt, anzunehmen, daß der Punkt von welchem die, unter sich die gegebenen Winkel bildenden Gesichtslinien ausgehen, über der Horizontalebene gelegen ist. Dieser Einschränkung ungeachtet, sieht man, daß es zwei den gegebenen Bedingungen entsprechende Punkte giebt; und eben so, könnte man in gewissen Fällen vier haben.

155. Bemerkung. Daraus, daß ein Punkt der Durchschnitt der horizontalen Projectionen zweier Curven ist, kann man im Allgemeinen nicht folgern, daß er einem Durchschnitte dieser Curven entspreche. Folglich construirt man stets, um einen, auf drei Oberflächen liegenden Punkt zu bestimmen, die horizontalen Projectionen der Curven in welchen eine diese Oberflächen die zwei anderen schneidet; irrig könnte man einen, beiden Projectionen gemeinschaftlichen Punkt als einen, den drei Oberflächen gemeinen Punkt ansehen. Aus diesem Grunde, kann es nützlich sein, auch die Projection des Durchschnitts der zweiten Oberfläche mit der dritten zu zeichnen, und dann wird man nur die, den drei Projectionen gemeinschaftlichen Punkte nehmen. Es könnten jedoch

immer noch Zweifel bleiben. Im Allgemeinen würde das sicherste Mittel darin bestehen, die verticalen Projectionen der Durchschnitte der ersten Oberfläche mit den zwei anderen zu finden, die Durchschnittspunkte dieser Projectionen mit den der horizontalen Projectionen zu vergleichen, und keine anderen auf jeder Projectionsebene zu nehmen, als die Punkte, welche ihre entsprechenden Projectionen auf der anderen haben. Indessen, da die Construction der Curven langwierig und schwierig ist, so wird es bequemer sein, in jedem besonderen Falle, irgend ein einfacheres Mittel zu suchen, welches alle diese Ungewissheiten beseitiget.

156. Aufgabe XX. Es werde ein im Raume erhabener Punkt angenommen, ein Luftball z. B. wär im nämlichen Augenblicke durch drei Beobachter wahrgenommen worden, und ein jeder habe von seinem Standorte aus, den mit der Verticale gebildeten Winkel der Gesichtslinie gemessen; diese Winkel und ihre Scheitel seien bekannt, man verlangt die Lage des Luftballs im Augenblicke der Beobachtung.

Um die in einem jeden Beobachtungspunkte errichtete Verticale, denke man sich einen geraden Kegel, dessen Scheitel in diesem Punkte liege, und dessen Erzeugende mit der Verticale den beobachteten Winkel bilde. Man erhält so drei conische Oberflächen, auf welchen der Luftball im Augenblicke der drei Beobachtungen gelegen wär. Man muß daher den Durchschnitt dieser drei Oberflächen bestimmen, was dadurch geschehen wird, indem man die horizontalen Projectionen der Durchschnitte dieser paarweise genommenen Oberflächen sucht.

Es seien (Fig. XX) a und a' , b und b' , c und c' die Projectionen der drei Scheitel, so werden die unbestimmten Verticalen $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$, die verticalen Projectionen der Achsen der drei Kegel sein. Man ziehe die Linien ap , bq , cr parallel zu xy , und die, mit den Verticalen

beziehentlich den bekannten Winkeln, gleiche Winkel bildenden Linien $a'p'$, $b'q'$, $e'r'$; auf diese Art ergeben sich die Projectionen einer Erzeugenden, eines jeden Kegels. Im Folgenden sind die zu vollführenden Constructionen dargelegt.

Nachdem in der verticalen Projection eine beliebige Horizontale $s't'$ gezogen worden ist, sehe man sie als die Trace einer horizontalen Hülfssebene an, durch welche man die drei Kegel schneidet. Die Schnitte werden drei Kreise sein, deren Horizontalprojectionen, beziehentlich in a , b , c ihre Mittelpunkte habende Kreise sind. Zur Vollendung der Bestimmung dieser Kreise, wird man bemerken, dafs die Trace $s't'$ die Linien $a'p'$, $b'q'$, $c'r'$ in Punkten d' , e' , f' schneidet, den Verticalprojectionen der Durchschnitte der Hülfssebene mit den Erzeugenden der drei Kegel. Man wird folglich die entsprechenden Horizontalprojectionen d , e , f darstellen, ferner drei Kreise mit den Halbmessern ad , be , cf beschreiben. Die Durchschnitte dieser, paarweise genommenen Kreise, geben zwei Punkte einer jeden der gesuchten Curven; und durch Wiederholung dieser Constructionen für andere horizontale Ebenen, findet man beliebig viele Punkte.

Die so in der horizontalen Projection bestimmten Curven sind gnh , ink , lnm . Da sie einander in n schneiden, so ist es leicht, sich zu überzeugen, dafs dieser Punkt wirklich die Projection eines, den drei Oberflächen gemeinschaftlichen Punktes ist. Denn, da der Punkt n den zwei Curven gnh , ink angehört, so folgt, dafs er die Horizontalprojection eines den zwei ersteren Kegeln gemeinen Punktes ist, und auch diejenige eines dem ersten und dritten gemeinschaftlichen; auf dem ersten jedoch, kann es nur einen einzigen Punkt geben, welcher sich in n projicirt (in der Aufgabe mufs man den unteren Mantel vernachlässigen); folglich ist dieser Punkt wirklich den drei Oberflächen gemein.

Die dritte Curve lnm hat hier keinen anderen Gebrauch, als eine Bestätigung zu liefern. Man erhält je-

doch zuverlässigere, in dem man aus den Mittelpunkten a, b, c drei Kreise beschreibt, welche durch den Punkt n gehen, und die man als die horizontalen Projectionen dreier horizontalen, beziehentlich auf den drei Kegeln liegenden Kreise betrachtet. Man bestimme, so wie die Figur dieß zeigt, die Verticalprojection eines jeden derselben; und es müssen diese drei Projectionen auf der nämlichen Horizontale $u'v'$ liegen. Dann leuchtet in der That ein, daß die Hülfssebene, deren verticale Trace $u'v'$ ist, die Kegel in drei Kreisen schneidet, welche einen, in n projecirten Punkt gemein haben.

Nach dem so eben Mitgetheilten, bestimme man die verticale Trace $u'v'$ der horizontalen Ebene, in welcher der, den drei Kegeln gemeinschaftliche Punkt liegt; folglich erhält man die Verticalprojection dieses Punktes, indem man die Projectionslinie nn' errichtet, und diese in n' auf $u'v'$ begränzt. Sonst ist zu bemerken, daß, da die Curven der Horizontalprojection sich in mehreren Punkten schneiden können, die Aufgabe auch mehrere Lösungen haben kann.

157. Aufgabe XXI. Einen Punkt zu bestimmen, dessen Entfernungen von drei festen Axen bekannt sind.

Es seien A, B, C die drei Axen, und α, β, γ , die Entfernungen dieser Axen von dem zu bestimmenden Punkte. Man denke sich in der Entfernung α eine, zur Axe A parallele Gerade, und beschreibe, indem man sie um jene Axe A dreht, einen Cylinder; einen zweiten Cylinder eben so um B durch eine; in der Entfernung β , geführte Parallele zu B , beschrieben; und einen dritten Cylinder um C durch eine, im Abstände γ gezogene Erzeugende. Die Aufgabe kommt darauf hinaus, die diesen drei Oberflächen gemeinschaftlichen Punkte zu finden.

Größerer Einfachheit wegen, werde die Horizontalebene perpendicular zur Axe A gewählt, die Projectionsebene jedoch in dieser Ebene willkürlich gelassen. Auf

diese Weise wird die Axe A , horizontal in einem einzigen Punkte a (Fig. XXI), und vertical auf einem Perpendikel $a'a''$ zu xy projectirt sein. Es mögen bb_r und $b'b'_r$, cc_r und $c'c'_r$ die Projectionen der Axen B und C sein. Die horizontale Trace des ersten Cylinders ist ein, aus dem Mittelpunkte a , mit dem Halbmesser α beschriebener Kreis; die Tracen der zwei anderen Cylinder sind Ellipsen, welche zuvörderst bestimmt werden sollen.

Errichtet man im Punkte b , wo die Axe B die Horizontalebene durchdringt, ein Perpendikel de zu bb_r , und nimmt $bd = be = \beta$, so wird de die kleine Axe der Ellipse sein, in welcher der zweite Cylinder die Horizontalebene schneidet. Um nun die groſse Axe zu erhalten, muſs man auf dieser Ebene die Fußpunkte der zwei in der, auf bb_r errichteten verticalen Ebene, liegenden Erzeugenden finden; zu diesem Zwecke wird diese Ebene zur verticalen Projectionsebene parallel gemacht. Angenommen, daſs dann die Projectionen der Axe B $b\lambda$, $b'\lambda'$ seien, so errichte man $\lambda'\mu$, $\lambda'\nu$ perpendicular zu $b'\lambda'$ und gleich β ; ziehe ferner $\mu\phi'$, $\nu\psi'$ parallel zu $b'\lambda'$, so werden nun die zwei fraglichen Erzeugenden $\mu\phi'$ und $\nu\psi'$ zu Verticalprojectionen haben. Da sie die Horizontalebene in ϕ und ψ schneiden, so wird man, durch Zurückführung dieser Punkte auf bb_r die groſse Axe fg erhalten. Bekannt mit den Axen de und fg , construire man die Ellipse $dfeg$, und dann wird es, so wie dieſs die Figur zeigte, leicht sein, die Projectionen des zweiten Cylinders zu erhalten. Durch ähnliche Constructionen gehen die Trace, und die Projectionen des dritten hervor.

Um nun die Durchschnitte des ersten Cylinders mit den zwei anderen zu finden, werde das Verfahren Nr. 128 angewendet. Hier fallen die horizontalen Projectionen dieser Durchschnitte mit dem Kreise pqm zusammen, und es sind daher nur ihre verticalen Projectionen, welche man zu construiren hat. Um diejenige des ersten zu erhalten, schneide man die zwei Oberflächen durch, zu bb_r parallele, verticale Ebenen. Es sei emn die Trace einer

dieser Ebenen; sie schneidet die beiden Cylinder in Erzeugenden, deren verticale Projectionen zu bestimmen sind: die Durchschnitte m' und n' werden zur Verticalprojection der ersten Curve gehören. Diese Projection ist $m'q'p'n'$. Aehnlich so findet man die Verticalprojection des zweiten Durchchnitts, indem man noch immer verticale, jedoch zu cc , parallele, schneidende Ebenen wählt.

Bei dem Gegebenen der Figur, begegnen sich die zwei Curven der Verticalprojection in zwei Punkten $p'q'$, welche wirklich die Projectionen zweier Durchschnitte sind; denn, in der Nähe der Punkte $p'q'$, entsprechen die Bogen dieser Curven Bogen, welche im Raume, auf dem, zwischen dem Durchmesser hi und der Projectionsaxe xy , eingeschlossenen Theile, des verticalen Cylinders liegen. Diese Bemerkung zeigt zugleich, dass man die horizontalen Projectionen p und q der Punkte, welche der Aufgabe Genüge leisten, erhält, indem man die Projectionslinien pp' , qq' durch den Halbkreis hmi begränzt.

Uebrigens, erkennt man, sind die Punkte $[p, p']$, $[q, q']$ so bestimmt, leicht, dass sie wirklich auf den drei Cylindern liegen, indem man prüft, ob durch jeden derselben, drei Erzeugende gezogen werden können, welche beziehentlich diesen drei Oberflächen angehören. Die in der Figur angegebenen Constructionen machen jede weitere Erklärung entbehrlich.

E n d e.

Berichtigungen.

A circular blue ink stamp from the Universitätsbibliothek Passau. The text "Universitätsbibliothek" is curved along the top inner edge, and "Passau" is at the bottom. The center contains the number "100000".

W



P



FK

0

Lefébure de Fourcy, Louis Etienne,

Lehrbuch der descriptiven Geometrie nebst einer, die Theorie der Ebene und
geraden Linie im Raume enthaltenden Einleitung

Bd.: [1]

Chemnitz [u.a.] 1845

Passau, Staatliche Bibliothek -- S nv/OS 3-1+2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11346022-9